LEGES NUMERANDI VNIUERSALES QUIBUS NUMERATIO DECADICA LEIBNIZII DYADICA NEC NON...

Johannes Albertus Berckenkamp

Digitized by Google

BIBLIOTECA NAZIONALE VITT. EMANUELE
12
19 P
12

BIBLIOTECA NAZIONALE VITT. EMANUELE ROMA
55
2 C
19

Ex Bibliotheca
majori Coll. Rom.
Societ. Jesu

14-22. H. 23

54.2.23.

54
6
18

54.
f
23.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

LEGES NUMERANDI VNIUERSALES

QUIBUS
NUMERATIO DECADICA LEIBNIZII
DYADICA
NEC NON
RELIQUA NUMERATIONIS GENERA
PARTIM PLURA, PARTIM PAUCIORA NUMERORUM
SIGNA CONTINENTIA APTANTUR

PER
IOANNEM ALBERTUM BERCKENKAMP.

Bibl. Sec. Coll. Rom. Soc. J.



BIBLIOTECA NAZ.
ROMA
VITTORIO EMANUELE

LEMGOVIAE,
Typis JOANNIS HENRICI MEYERI,
AULÆ LIPPIACÆ TYPOGR. M DCC XLVII.

Digitized by Google

Digitized by Google

PRÆFATIO.

Lectori Beneuolo S. D.

Omnes propoſitiones quibus rerum varia vel coexiſtentia vel ſibi inuicem ſuccedentia aptantur accommodanturque *regulæ, normæ nec non leges* appellari ſolent. Quæ quidem tam varii ſunt tenoris, quanta eſt varietas rerum quæ ipſis attemperari debent. Aliæ enim ſunt leges ſeu regulæ pſychologiæ, quas imaginatio, facultas appetitiua, memoria ſequitur; aliæ ab inueſtigatoribus rerum naturalium deteguntur, quibus mechanica, ſtatica, hydraulica accommodatur. Et vt cetera transeam dantur etiam leges in matheſi pura, *in numerationis* parte præſertim, quibus numerandi ratio ſubiicitur. *a*)

Quem-

a) Quod tam latiori ſenſu vox *legis* hoc temporis tractu ſumatur, nulla vberiori indagatione indiget. Eodem vero ſignificatu hanc commemoratam vocem iam antiquitus eſſe ſumtam, pluribus *Henr. Koehlerus* in Iur. Natur. exercitat. ſpho 345, ex *Martin.* Lexic. Phil. &, *Thomaſ.* differt. de poteſt. legislat. probat.

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

Digitized by Google

Quemadmodum vero leges, ratione argumenti diuerſi, diuerſæ ſunt, ſic etiam ex earum ambitu quem ſingulæ complexum habent diſcrimen cernitur. Nonnullæ enim *leges* certas tantum ſpecies ſub ſe continent, & *ſpeciales*: aliæ vero tota genera amplectuntur, quæ ſibi adſtringunt, & *generales* nec non *vniuerſales* dici merentur. Utrumque varia numerandi ratio illuſtrat dilucide. Quælibet enim numeratio, vti dyadica, tetractica, decadica & quæ ſunt plura, ſuas habet regulas ſeu leges ſpeciales quas ſequi cogitur: aſt in qualibet numerationis ratione, facta regularum comparatione, nouas offendimus leges, quæ ad omnes numerandi modos applicari valent, quare etiam vel ex hoc pacto *leges numerandi generales ſeu vniuerſales* vocari, & in hac noſtra commentatione, uti titulus docet, abſolui debent.

Mens quidem erat arithmeticam, quam per duos annos olim alumnis Gymnaſii Heruordienſis mathematicorum more dictaueram explicaueramque, luci exponere publicæ. Poſteaquam vero eam iterum amplificans reuiſi, prima arithmeticæ ſtamina, numerandi rationem puto, fines huius propoſiti præter opinionem dilatabant: quapropter paulo conſultius mihi viſum eſt, hanc numerandi rationem eiusque excogitatas regulas, peculiari proſequi ſtylo atque ea, qua oculis obiiciuntur forma, edere.

Verecundiæ fines tranſirem, atque nimis confidenter agerem, ſi aliis palmam præripere, mihique ſolummodo, hanc commemoratarum quamuis exiguam legum inuentionem adſcribere præſumerem.

Credo

Digitized by Google

Credo non ſolum has indicatas regulas matheſis peritis & iam dudum in ſua initia reſolutis viris haud incognitas fuiſſe; ſed credo etiam eas adhuc in viuorum numero numeratos mathematicos nec non alios litteris deditos non fugere. Quod vero nonnulli dyadicam & reliqua numerationis genera ita diſcant, vt plurimi tirones ſine omni ratione ſolidaque regularum cognitione curſim decadicam arripiunt, hoc etiam prorſus credo. Quamuis vero facile inducar, vt hæc omnia credam, aut ſaltem mihi perſuadeam: Siquidem induſtria mea eo non progreſſa eſt, vt omnium mathematicorum & arithmeticorum ſcripta peruolutarem, & ob deficientem occaſionem peruolutare poſſem. Attamen certo etiam ſcio, me quidem inſolitarum adhuc numerationum exempla, *a*) nunquam vero earum leges legiſſe, quibus omnis numerandi ratio iudicari atque ad noſtrum arbitrium non poſſit non inſtitui. Quarum vero inueſtigatio non maiorem curam & operam, quam accurata earum applicatio requirit.

Hoc, in doctrina collocantibus mediocre ſtudium, ſatis experientia, illud vero logica, quæ inde etiam non

a) Quo imprimis referri debent Viri Exper. Doct. Krugeri Anmerkungen über des Herrn Geheimden Rath Wolffens Auszug aus der Rechen-Kunſt, quibus etiam, plurimarum numerandi rationum pauciora quam decem ſignà continentium exempla dedit, eaque more ſuo conſueto, hoc eſt diſtincte & accurate abſolvit.

non nunquam *via inueniendi veritatem* deſcribitur, aperte docet. *a*) Quemadmodum enim reflectendo ad obiecta & abſtrahendo eorum ſimilitudines inueniuntur indiuiduarum ſpecies, ſpecierum genera, eodem pacto ex inferioribus legibus deducuntur ſuperiores, & ex ſimilitudinibus legum dyadicæ decadicæ & reliquarum numerandi rationum eruuntur leges, quæ ad cetera numerandi genera applicari valent, & omnes ſingularum numerationum regulas ſub ſe continent. Quantum vero ita comparata cognitio vniuerſalis a logicis laudatur, *b*) tantum etiam leges numerandi vniuerſales, ob ſingularem, quem in omni numerationis genere præſtant vſum prædicandæ veniunt. Quem præſtant vſum, eandem etiam adferunt delectationem iis, qui ex hac doctrina varios numerandi modos ſoluere, ſuoque arbitrio noua numerandi ratione quemuis numerum exprimere didicerunt. Quare equidem eorum præſertim vſui hanc compoſui commentationem, qui omnem aliam numerandi rationem, quam cui vsque a cunabulis adſueuerunt decadicam, partim deſperant; partim vero etiam ineptam diſcendi rationem ſequuntur, & primis, vt dicitur, labris numerorum rationes guſtant.

De

a) Sic enim inſcribitur logica, opera Chriſt. Martini P. R. Vratislauiæ 1733 excuſa.

b) Perlegi merentur Illuſt. Viri Wolffii: Vernünftige Gedanken von den Kräften des menſchlichen Verſtandes ꝛc. præſertim verba §phi 29 cap. I.

De methodo vt multa hic dicam, ſupervacaneum duco. Ipſa numeratio qualiscunque etiam ſit, refertur ad ſic dictam matheſin puram. Itaque conſentaneum erit eandem *methodum* ſequi, quam ipſa materia docet, nimirum *mathematicam*. Quam eo quidem ordine nobis præſcribimus, vt numerorum prius affectiones ad rem propius pertinentes paucis abſoluantur, quam eorum regulas proſequamur ſtylo. Et ipſæ regulæ non minus naturæ conuenienter ſe inuicem excipere debent. Generales etenim ſuæ ſubordinatæ ſpeciales in quolibet numerationis problemate ſequuntur. Quot enim abſoluimus numerationis modos, tot etiam peculiaria confecimus problemata, quibus mathematicorum more propoſitiones datæ per leges ſoluuntur, atque deinde inſtituta operatio rite facta demonſtratur. Vnumquodque problema inſequitur corollarium & huic ſuccedit theorema. Illud præſertim rationem qua ſe inuicem numeri ſucceſſu locorum excipiunt indicat. In hoc vero proxime præcedentis problematis exemplum demonſtratur, quod hac ratione itidem illuſtrat & probat.

Non dubito fore nonnullos, qui totam hanc tractationem paulo breuiorem abſolui atque unum alterumue numerationis modum prætermitti poſſe exiſtiment, ſed hi erunt fere, qui ſuo ingenio aliorum facultates iudicant. Hi ſi didicerint, quod ingeniorum tanta ſit varietas ac diſſimilitudo, quanta vix eſt corporis vultus atque oris non admirabuntur, nos paulo copioſiores eſſe in exponendis numerationum regulis. Alii enim tardo nec non mediocri ſunt ingenio, qui tamen non ſine la-

bore & opere imbuunt artes, quibus omnino vberiores explanationes & exempla varia auxilio eſſe poſſunt.. Alii vero ingenium ſortiti ſunt docile, qui ſimul vt res arduas & cognitu difficiles audiunt, aut legunt, ſtatim diſtincte percipiunt. Hi, ſi exiguam hanc commentationem perluſtrare æſtimant, perceptis legibus generalibus, periculum ipſi faciant, atque ſua elaborata varii numerationis generis exempla conferant cum his exaratis; tum demum adhuc noſtra ſi ita accuſanda eſt prolixitudo, in eundem conuertitur vſum, quem copioſiora exempla in arithmeticorum libris præbent. Itaque inſtituti mei ratio fore, vt neque his nec illis optimis interpretibus diſpliceat, ſpero.

Digitized by Google

Definitio.

I.

Quod ita eſt aliquid, vt aliud præterea idem eſſe nequeat, *vnum* dicitur.

Scholion.

2. Quamprimum nobis repræſentamus aliquod indiuiduum a reliquis rebus ſeparatum, tum illud eſt *vnum*. Sic globus plumbeus per ſe conſideratus, eſt aliquid, & ita quidem, vt præterea alius globus, aut alia quædam res idem globus eſſe nequeat, hinc dictus globus efficit *vnum*. Sumamus loco globi litteram B, ſub qua ſibi quamlibet rem fingere licitum eſt. Si B ita concipiatur, vt ſimul ſub eo non intelligantur D & E diuerſa, tunc B vocatur *vnum*. Eodem modo facile intelligitur definitio Illuſtr. Leibnitii, quæ ſic ſe habet: Si A ſit B nec præterea D ponatur B, niſi A & D idem ſint, ponetur B vnum.

Definitio.

3. Abſtractum de eo quod vnum eſt, dicitur *vnitas*.

Definitio.

4. *Vnitates eædem*, quæ per eandem, & *diverſæ ſunt*, quæ per diuerſas cognoſcuntur notiones.

Scholion.

5. Res, quæ vt eædem nobis repræſentantur, eandem habent

bent notionem, ſic nummus imperialis A viginti quatuor groſſis & nummus imperialis B totidem groſſis conſtans eandem habent notionem, quia nobis vt eædem repræſentantur, & ſunt *vnitates eadem.* Quod ſi vero A nummum ſupradictum imperialem, & B diobolum tantum indicet, tum A & B ſunt vnitates diuerſæ, diuerſas enim habent notiones.

Definitio.

6. Compoſitio earundem vnitatum conſtituit *numerum* & nos *numerare* dicimur quamprimum plures vnitates easdem componimus.

Corollarium.

7. Quo plures adſunt in numero vnitates, eo maior eſt numerus. (§.6)

Scholion.

8. Nonnunquam ponitur quæſtio: vtrum etiam *τὸ vnum* conſtituat numerum quia ſecundum vſu receptam & datam definitionem ad numerum plures requiruntur vnitates. (§.6) Quæ vero haud difficile diſſolui poteſt, quamprimum tantum obſeruatur diſtinctio quam inter numerum numeratum & numerantem facere ſolent. *Numerus numeratus*, indicat res determinatas, quæ numerantur: *numerus numerans* vero exponit ſigna quibus rerum vnitates denotantur, & hoc vlteriori ſenſu τὸ vnum etiam numerum efficere poteſt. Vti etiam hoc ſignificatu in ſubſequentibus numeri intelligi debent, ſiquidem minus ſolliciti ſumus, de iis rebus, quæ ſub ſignis vnitatum nobis repræſentare poſſumus. Pari ratione numeri etiam in *homogeneos* & *heterogeneos*, *integros* & *fractos*, nec minus in *rationales* & *irrationales* diuidi ſolent; aſt hæc omnia pluribus perſequi, non conſultum eſt; ſiquidem ea tantum in medium proferre ſtudemus, quæ ad vberiorem explicationem & ſolidiorem demonſtrationem propius pertinent.

Definitio.

9. *Signum* eſt medium rei cognoſcendæ, & res, quæ per ſignum indicatur, *ſignatum* dicitur. Cum vero ratio ſigni vel in

Digitized by Google

in ipſis rei ſeu ſignati notionibus contineatur; vel ab arbitrio entis cuiusdam rationalis dependeat: ſigna in duas partes diuiduntur, quarum hæc *artificialia*, illa vero *naturalia ſigna* vocari aſſolent.

Corollarium.

10. *Signa* naturalia ſemper rei inſunt (§. 9) vnde etiam in *neceſſaria* abeunt; artificialia vero ſigna pro hominum lubitu mutari poſſunt (§. cit.) hinc etiam *arbitraria* appellari merentur.

Scholion.

11. Fumus eſt ſignum ignis naturale & neceſſarium, ſemper enim cum igne conjunctus eſt. Et arbor floreſcens, eſt ſignum appropinquantis æſtatis. Hedera vero ſuſpenſa eſt ſignum vini quod ibidem venditur; cum vero hoc ſignum hominum conſenſu & conſuetudine introductum ſit, atque adeo loco huius hederæ alia quædam res vinum veno expoſitum repræſentare poſſit, hoc ſignum eſt artificiale & arbitrarium.

Hypotheſis.

12. Res, quæ ſibi ſalua quantitate inuicem ſubſtitui poſſunt, ſeu ſibi *æquales* gaudent ſigno $=$. Quod æque arbitrarium eſt ac ſubſequentia ſigna mathematicorum in arithmeticæ ſpeciebus recepta. Hoc modo inter ſe conuenerunt vt additionem per ſignum $+$ & multiplicationem per vnicum punctum (.) exprimerent, ſubtractionem vero per $-$ & diuiſionis ſpeciem per duo puncta (:) indicarent.

Scholion.

13. Additionis, multiplicationis & reliquarum arithmeticæ ſpecierum definitiones hic interſerere, ſuperuacaneum duxi, a propoſito enim noſtro longe abeſſet, commemoratas ſpecies explicare, ſiquidem numerationis varia genera hac tantum commentatione ſub oculos ponere, eorumque leges & regulas vniuerſales, in quas ad vnum omnes redigi valent, indicare, mens eſt. Aſt ſigna deſcripta, eam ob cauſam delineare libuit, quia ipſis in ſubſequenti explicatione, ad rem breuius exponendam, minus ſuperſedere valemus.

Definitio.

14. Signa, quibus numeri exprimuntur, eorum *characteres*, *notæ numericæ* nec non *figuræ* appellantur.

Corollarium.

15. Character ſeu figura quo pauciores, eo *minor*, quo vero plures repræſentat vnitates eo *maior* eſt, (§.14 collat. §.7) hinc character eſt *minimus*, qui vnam & *maximus* eſt, qui inter determinatam characterum quantitatem plurimas continet vnitates.

Scholion.

16. In ſpho præcedenti & reliquis ſubſequentibus non de fractis, ſed integris numeris ſermo eſt: atque adeo minimus eſt character, ſi vnam tantum indicat vnitatem, hæc enim ſoli nihilo maior eſt. Maximus vero numerorum character nunquam poteſt prius definiri, quam ſeries quædam characterum ad numeros indicandos determinata eſt. Sic in arithmetica decadica eſt character maximus = 9 in ternaria vero = 2 & in dyadica character 1 eſt minimus & maximus ſimul, quod ipſa tractatio vberius docebit.

Theorema.

17. Numerorum characteres ſunt arbitrarii.

Demonſtratio.

Numerorum characteres ſunt ſigna ad exprimendas vnitates (§. 14.) cum vero ſigna vel naturalia, vel artificialia ſint, (§. 9.) quorum hæc in arbitraria, illa in neceſſaria abeant (§. 10.) & numerorum ſigna ad artificialia pertineant; ſiquidem eorum ratio in ipſis rerum notionibus non contineatur, ſed ab hominum arbitrio ex conſenſu vnanimi dependeat (per exper.): numerorum figuræ ſeu charactes ſunt arbitrarii.

Hypotheſis.

18. Characteres numerorum, hoc temporis tractu vſu recepti, ſunt: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Theo-

Digitized by Google

Theorema.

19. Numerorum characteres toties ſunt iterandi, quoties deſideratus numerus, hic vel nouem characteres, vel generaliter, in quolibet numerationis genere conſtitutos characteres vnitatum pluralitate ſuperat.

Demonſtratio.

Quot ſunt vnitates, tot etiam vel eſſe debent peculiares characteres ad eas indicandas, vel ſemel adhibiti iterum iterumque ſunt repetendi vsque dum vnitatum quantitas iis deſignatur. Non datur enim tertium. Cum vero tot ſint vnitates, quas vix ac ne vix quidem nobis repræſentare, nedum vt peculiare nomen & characterem ſingularem ipſis indere valeamus (per exper.) ; neceſſario etiam quidam characteres ſunt eligendi, quorum repetitione quantitates numerorum exprimuntur, atque adeo non ſolum nouem vnitatum characteres ſupra commemorati, ad exprimendos numeros maiores iterari debent ; ſed etiam in quolibet numerationis genere toties iſtius characteres ſunt repetendi multiplicandique, quoties ſimplici eorum valore numerus deſideratus exprimi non valet.

Axioma.

20. Characterum iteratio, nimirum vtrum character ſemel tantum an ſæpius intelligendus ſit, certo quodam ſigno indicari debet.

Scholion.

21. Hæc in præcedenti §pho allata propoſitio, tam clara ac firma eſt, vt nemo de veritate iſtius dubitauerit. Quare etiam in numerum axiomatum eam ponere placuit. Fingamus, ſigna ad indicandam characterum iterationem eſſe ſuperuacanea, tunc etiam ſuperuacaneum eſſet omne medium valorem characteris cognoſcendi, (§. 19. & 14.) quod vero concedi non poteſt, atque inſulſum eſſet dicere.

Hypotheſis.

22. Signum ex quo diiudicatur, vtrum figura ſemel an ſæpius intelligenda ſit, ex poſitione loci a dextra ſiniſtram verſus videre eſt. Quo vero character quæſitum locum acquirat,

quirat, ipſi tam multa ſigna ſpeciem circuli o præbentes annectuntur, vsque dum locum occupat deſideratum.

Corollarium.

23. Itaque procedit ordo & ſeries locorum a dextra verſus ſiniſtram (§. 22.) vnde character in loco dextimo primus, *primum*, hunc vero ſiniſtram verſus ſequens *ſecundum*, & ſecundum excipiens *tertium* & ſic porro, in ſerie characterum tenet locum. Sic in ſerie characterum 2645. character 5 primum, 4 ſecundum, 6 tertium, 2 quartum locum occupat.

Corollarium.

24. Signum o quod alias etiam cyphra vocatur, nihil per ſe ſignificat, ſed reliquorum characterum quibus præponitur valorem tantum auget. (§. 22.)

Corollarium.

25. Quamprimum in numero occurrunt characteres, ex quibus ſimul cognoſci poteſt, quem locum certus quidam character implere debet, tunc etiam ſuperuacaneum eſt ſignum o ſeu cyphra (§. 22. & 24.). Cuius exemplum in præcedenti §pho ſimul in medium prolatum eſt.

Scholion.

26. Ex collatione §phi 18 cum ſubſequentibus, præſertim §pho 22. ſatis apparet, quod ſigna quibus hodie numerare ſolemus ad vnum omnia ſint decem, nimirum: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9. Quoniam vero hæc delineata ſigna non ſolum ſunt arbitraria, (§. 17.) ſed etiam ex hac ratione de eorum ortu eiusque modo, loco & tempore ſententia eſt varia: hac occaſione etiam, nobis haud inconſentaneum videtur, in quantum propoſiti ratio permittit, paucis huc aliorum opiniones de his commemoratis ſignis in medium proferre. Daſypodius ex litteris græcis, quibus græcorum gens, ad exprimendos numeros, antiquiſſimis temporibus vſus eſt, adductas figuras ortas eſſe confirmare ſtudet. Quod vero Reinmannus & qui iſtius ſententiam ſequuntur concedere nolunt, qui maiorem congruentiam inter litteras alphabeti germanicas quam græcas cum characteribus eſſe putant. Alii cum Athanaſio Kirchero

ex

Digitized by Google

ex quadrato quatuor lineis ſecato, quod in circulo incluſum eſt, hæc decem ſigna deriuant. Qui vero aliquam inter vnitates earumque characteres conuenientiam videre putant, ſimul arbitrantur, quemlibet characterem ex tot lineolis eſſe compoſitum, quot ille repræſentat vnitates. Quemadmodum vero de ratione & modo, ſic etiam de loco & tempore, quo ſæpius commemorati characteres orti ſunt, non eadem omnibus mens eſt. Alii hoc decus Phœnicibus acceptum ferunt, alii cum Walliſio Indos vt characterum inuentores laudant. Et qui huic ſententiæ fauent, cum collaudato auctore, hos characteres ab Indis ad Arabes, per Arabes in Hiſpaniam, & ex hac regione per Gerbertum olim monachum Floriacenſem in Galliam translatos eſſe probare nituntur. Hic monachus deinde Archi-epiſcopus & denique circa A. C. 999. Papa delectus eſt Romanus, quo honore vſus, nomen Sylueſtri II. induit & A. C. 1003. vitam cum morte mutauit. Atque adeo ex ſententia eorum, qui huic Sylueſtro primum in Europa characterum vſum adſignant, ſimul etiam inde probant: hos characteres per ſeptingentos annos noſtratibus haud ignotos fuiſſe. Quamuis non deſint, qui, eos iam ſæculo quinto inuentos eſſe, probare ſtudent. Quod pluribus indicat Ill. Wolfius in Elem. Matheſ. vniu. Tom. 1. §. 51. p. 29. Priusquam autem hi characteres in vſum venerunt, quælibet natio litteris ſuis alphabeti numerare conſueuit. Sic Ebræorum, Græcorum, nec non Romanorum gens, quælibet olim ſuis litterarum elementis expreſſit numeros. Quoniam vero characteres iam vſu recepti, omnia litterarum elementa & facilitate ſcribendi & computandi longiſſime ſuperant; litteræ alphabeti obſoletæ, & loco earum ante commemorati characteres communi fere gentium ſuffragio vbiuis recepti ſunt. Sed ſatis hac de re, conuertimus nos iterum ad tractationem ipſam.

Definitio.

27. Numerorum vnitates vel vno vel pluribus exprimuntur ſignis (§. 19). Si numerus vno charactere conſtat, *character ſimplex*, vocatur; quamprimum vero numerus pluribus debet deſcribi ſignis, tunc *numeri* eorumque *characteres coniuncti*, *compoſiti* appellari ſolent.

Scho-

Digitized by Google

Scholion.

28. Numeri ſimplices, vel eam ob cauſam vocantur *digiti*, quod olim in digitis numerari conſueuerint. Conjuncti numeri, in arithmetica decadica iterum peculiare nomen induunt. Quamprimum enim numerorum compoſitio meris decadibus conſtat; tunc numeri coniuncti dicuntur *decadici*, nec non *articuli*. Articuli præſertim appellantur, quia ſunt quaſi internodia quibus numeri inter ſe nectuntur. Qua ex denominatione, ſi articuli comparantur cum digitis, illud decantatum prouerbium ortum eſt: *Arithmeticus plures habet articulos, pauciores vero digitos homine.* Sic 1 vnum 2 duo ſunt digiti qui in articulos abeunt, quamprimum vnicuique charactcri annectitur cyphra hinc 20 viginti, 30 triginta, eſſent articuli. Sed 11. 12. 13. 106. & characteres ſimiles ſunt numeri coniuncti, qui etiam *mixti* dicuntur, quia decadibus & ſimplicibus conſtant.

Scholion.

29. Hactenus indicatum eſt, numerorum characteres ex poſitione locorum & quidem a dextra ſiniſtram verſus eſſe diiudicandos; aſt nondum euictum eſt, in quantum character locum ſecundum aut tertium occupans, augeri multiplicarique debeat: ſequitur ideo, quo ordine numerorum characteres in quolibet deſignato loco valorem ſuum augeant.

Hypotheſis.

30. 1) Quilibet character in primo loco poſitus natiuum ſuum valorem retinet, ſeu indicat meras vnitates.

2) Valor characterum in loco ſecundo exiſtit, ſi character loci primi maximus, addatur minimo, quæ ſumma toties in hoc loco ſubintelligitur, quot character continet vnitates.

3) Valor characterum in tertio loco oritur, ſi ſecundi loci valor in ſe ipſum ducatur, quod factum toties hic ſubintelligi debet, quot character indicat vnitates.

4) Va-

Digitized by Google

4) Valor charaςterum in quarto loco proficiſcitur ex loco tertio per ſecundum locum multiplicato, quod factum etiam toties ſumitur quot character vnitates repræſentat.

5) Valor characterum in loco quinto cooritur, ſi quartus locus multiplicatur per locum ſecundum, quod factum tam ſæpius ſubintelligitur, quam character in hoc loco vnitates exprimit.

6) Valor characterum in loco ſexto, originem ſuam debet loco quinto & ſecundo, qui per ſe multiplicantur, quorum factum etiam toties ſubintelligi debet, quot character in loco ſexto, continet vnitates. Pari ratione ex facto loci ſexti & ſecundi, valor loci ſeptimi, & ex facto huius & ſecundi loci producitur valor characterum in loco octauo. Sic in infinitum ea obſeruatur locorum ratio, vt valor loci conſequentis ſit factum, quod ex antecedente & ſecundo locum ortum eſt.

Definitio.

31. Si quantitas B determinatur ex quantitate C, tum hæc relatio vocatur *Ratio*, cuius B & C ſunt *termini rationis.* Et *antecedens* dicitur *terminus* qui ad alterum; *conſequens* autem ad quem alter refertur.

Scholion.

32. E. gr. Si duo characteres 6 & 3 inter ſe comparantur ſine aſſumto tertio homogeneo, tum character poſterior, priori minor & inæqualis deprehenditur, & hæc inſtituta comparatio, character ſit vel maior vel minor aut æqualis alteri, dicitur *Ratio*, cuius hic character 6 antecedentem & 3 conſequentem terminum conſtituit. Et cum termini rationis modo æquales modo vero inæquales reperiantur: *ratio* etiam vel *æqualitatis* vel *inæqualitatis* eſt, quæ iterum in *maiorem* & *mi-*

Digitized by Google

norem inaequalitatem diuidi ſolet. Sed præterimus has diuiſiones, quia ad declarationem propoſiti nihil pertinent.

Definitio.

33. Quotus ſeu numerus qui indicat, quoties vnus terminus rationis in altero contineatur, *exponens rationis* dicitur. E. gr. rationis 12 ad 3 exponens eſt 4 & commode exprimi poteſt per 12 : 3, ſecundum §phum 12.

Corollarium.

34. Exponens rationis idem quod in exemplis diuiſionis quotus eſt; & terminus rationis antecedens maior diuidendum, conſequens diuiſorem æquiparat. Hoc ſatis inſtituta comparatio cum ſic dictis regulis diuiſionis probat.

Corollarium.

35. 1) Itaque eſt exponens rationis ad vnitatem, vt antecedens ad conſequentem terminum minorem: 2) Et ſi conſequens eſt vnitas, antecedens eſt ipſe exponens rationis. 3) Pariter etiam peracta multiplicatione termini conſequentis minoris per rationis exponentem, factum ex ea ortum æquiparat terminum antecedentem: qui ſi iterum diuiditur vel per conſequentem terminum aut rationis exponentem; tum caſu priori, quotus ex hac diuiſione erumpens exponentem, poſteriori vero caſu conſequentem terminum parem ponit. 4) Ex quibus ſimul apparet: ſi factum, ex numero in ſe ipſum ducto ortum, quod quadratum vocatur, iterum per eundem numerum diuiditur, exponentem huic diuiſori eſſe æqualem.

Scholion.

36. 1) Quæ omnia cum ſatis ex doctrina arithmetica præſertim multiplicationis & diuiſionis ſpecie intelligi poſſint, etiam vel ex hoc capite vt lemmata hic conſiderari valent, quorum veritas alio loco ſatis euicta eſt. Ad cuius vberiorem declarationem ſubſequens exemplum ſub oculos ponere iuuat: Rationis termini ſint 12 : 3 quorum exponens eſt = 4. Terminus antecedens = 12, conſequentem = 3, quater continet. Et cum exponens rationis totidem contineat vnitates: Atque adeo etiam toties continetur in eo vnitas, quoties terminus conſequens minor in antecedente vt maiori compre-hen-

Digitized by Google

henditur, ſeu exponens rationis eſt ad vnitatem vt terminus antecedens ad conſequentem. 2) Et cum ſecundum regulas arithmeticas per vnitatem 1 neque multiplicari nec diuidi poſſit, ſed numerus diuidendus ſemper idem maneat: neceſſario etiam antecedens terminus, ſi diuiditur per conſequentem, qui vnitate conſtat, dat exponentem qui terminum antecedentem æquiparat. E. gr. ſit terminus antecedens 6 & conſequens 1. tum ſi 6 : 1, exponens eſt = 6. 3) Sic etiam reliqua §phi præb. cum experta veritate congruunt. Si enim terminus conſequens 3 per exponentem 4 multiplicatur factum eſt = 12 quod antecedentem terminum efficit. Haud abſimili ratione per diuiſionem huius termini, exponens aut conſequens terminus producitur. Si enim terminus antecedens 12 diuiditur per conſequentem 3, quotus eſt = 4 & exponens dicitur. Quod ſi vero idem terminus antecedens 12 diuiditur per exponentem 4, tunc quotus eſt = 3, qui per hypotheſin terminum conſequentem repræſentat. 4) Sed hac propoſitione declarata haud difficile etiam eſt cognitu: numero, ex quo quadratum coortum eſt, exponentem eſſe æqualem. Si enim 3. 3 factum eſt = 9 quod, ſi iterum per 3 diuiditur, exponens eſt = 3, hinc exponens & diuiſor ſibi inuicem ſunt æquales.

Definitio.

37. *Rationes* quæ eodem ſeu æquali gaudent exponente ſunt *eædem.* Et ſi juxta eandem rationem tota ſeries quantitatum aut numerorum creſcit vel decreſcit vocatur *progreſſio geometrica.* E. gr. 2 : 4 = 3 : 6 ſunt rationes eædem & proportionem conſtituere dicuntur. Et 2. 4. 8. 16. 32. progreſſionem efficiunt, quæ geometrica dicitur, quia ab arithmetica progreſſione diſcrepanda venit. Siquidem hæc eadem differentia creſcit vel decreſcit, & peculiarem ſuum vſum in doctrina de Logarithmis præſtat.

Theorema.

38. Characterum valor ſucceſſu locorum in infinitum creſcit progreſſione geometrica.

Demonſtratio.

Repræſentemus nobis quædam characterum loca per litte-

Digitized by Google

ras A B C D E, quarum quælibet ſupra (§. 23) commemorato ordine retrogrado locum impleat. Tum ſi diuiditur D per vnitatem quæ eſt = E, locus enim primus meras continet vnitates (§. 30 n. 1) exponens rationis eſt = D (§. 35 n. 1 & 3). C, ortum eſt ex D in ſe ipſum ducto (§. 30. n. 3), quod ſi igitur hoc factum iterum diuidatur per D, exponens rationis itidem D erit (§. 35 n. 4). D multiplicatum per C, dedit factum τȣ B (§. 30 n. 4), & ſi B per C iterum diuidatur, exponens rationis qui eſt = D ex eo viciſſim cooritur (§. 35 n. 3) Sic etiam B cum D multiplicatum conſtituit factum τȣ A. (§. 30 n. 5). Quapropter ſi A per B diuidatur, exponens rationis hic ſimiliter eſſe debet = D (§. 35 n. 3) Et tali modo in omni terminorum ratione ſemper idem invenitur exponens qui hic eſt = D. Quod ſi vero in rationibus ſemper idem occurrat terminorum exponens, ratio vocatur eadem (§. 37) & tota ſeries quantitatum iuxta eandem rationem creſcentium eſt progreſſio (§. cit.) hinc characterum valor ſucceſſu locorum creſcit progreſſione geometrica.

Corollarium.

39. Quicquid in mathematicorum ſcientiis de progreſſione geometrica demonſtratur, idem etiam pari iure ad numerorum progreſſionem applicari valet.

Corollarium.

40. Characterum progreſſio maxime ex loco ſecundo cognoſcitur, hic enim inſtar exponentis eſt (§. 38. 33). Cui igitur huius loci valor indicatur ſine magno labore, reliquorum locorum valorem inuenire poterit, ſiquidem ſecundum regulas progreſſionis geometricas inſtituta multiplicatio termini antecedentis cum rationis exponente, ſemper parit terminum conſequentem. Cum vero eadem ſit locorum in numeratione ratio, quæ eſt inter dictos terminos: loci ſequentis valor ſemper exiſtit, ſi antecedentis per exponentis rationem aut quod idem eſt per loci ſecundi valorem multiplicatur.

Scholion.

41. Iam ſatis, & quantum in re paululum obſcura fieri potuit, plane & dilucide explicatum eſt; quo ordine ſe inuicem

Digitized by Google

cem numeri eorumque characteres excipiant; nec non, qua progreſſione, quæ geometrica dicitur, valorem ſuum augeant. Quæ quidem omnia, cum ita ſint comparata, vt hactenus nota numerationis genera, ad explicatas regulas ſine omni exceptione applicari valeant: nemo etiam non concedet, has paulo ante expoſitas regulas, iure meritoque vniuerſales eſſe dicendas. Quo vero earum veritas eo clarius ſub oculos cadat, exempla & inſolitæ & iam diu uſu receptæ numerationis in medium proferre iuuabit. Naturæ quidem magis conueniens eſſet, cum arithmetica pauciſſimis ſignis conſtans nimirum 0 & 1, quæ ab inuentore ſuo Leibniziana vocatur, initium facere & ſic in eo ordine, quo ſigna ſe ratione pluralitatis inuicem excipiunt, ad reliqua numerationis genera tranſire: aſt haud inconſentaneum videtur, prius arithmeticæ decadicæ convenientiam cum aſſertis regulis indicare, quam ad reliqua genera nos conuertimus. Quod quidem duplici ex ratione fit: primo enim huius paulo ante indicatæ decadicæ applicatio ad commemoratas regulas, ex recepto vſu haud difficilis erit intellectu; deinde vero etiam ab hoc genere initium facimus, quia reliquarum numerationum proprietates locorumque valorem cum hac vſu conſueta arithmetica indicare paulo conſuetius viſum eſt, quam vnius cuiusque characteris valorem in reliquis numerationibus peculiari nomine inſignire. Quapropter de nominibus in haud vſitatis numerandi generibus minus ſoliciti ſumus, ſed quicquid quilibet character progreſſu locorum indicat, per arithmeticam decadicam e regione poſitam explicabimus. Sequitur igitur huius vberior explanatio.

Definitio.

42. *Numeratio decadica* generatim eſt quæ ratione creſcit decupla, & hic præſertim ea dicitur, qua ſupra deſcripta ſigna 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9, commemorata ratione ad numeros exprimendos vſurpantur.

Scholion.

43. Quod ratio decupla ſemper numerationi decadicæ competat, nemo quantum nobis videtur in dubium vocabit. Aſt longe aliter ſe res habet cum dictis characteribus. Romani

ni & qui eorum characteres ad indicandos numeros adhibent, computant ratione decupla, ſed eorum ſigna a commemoratis quam quod maxime ſunt diuerſa. Quapropter quidem verum eſt, quod numeratio, qua ſupra indicata ſigna, & ita quidem vt ſucceſſu locorum ratione creſcant decupla vſurpantur, iure vocari poſſit decadica. Sed hæc propoſitio non eſt tam firma vt ſimpliciter poſſit conuerti ſeu reciprocari. Ab experientia atque adeo etiam a veritate valde aberrat, qui probare ſtudet quod omnis numeratio decadica ſine adhibitis ſupra dictis characteribus ſtare non poſſit. Ratio vero, cur iſtiusmodi propoſitiones non poſſint ſimpliciter conuerti, atque eandem ob cauſam ex numero definitionum applicantium merito exſulent, pluribus demonſtratur *in noſtra commentatione logica de affectionibus propoſitionum relatiuis.* Sit vero eodem quid ſit hac commentatione hic præſertim de iis characteribus nobis ſermo eſt, quos ſupra indicauimus. Vnde etiam in ſubſequentibus §phis tota noſtra explicatio tam decadicæ quam reliquorum numerationis generum, eo præſertim directa eſt, vt ſemper horum characterum reſpectum habeat.

Corollarium.

44. Numeratio decadica, quia decem gaudet ſignis, quibus numeri exprimuntur (§. 42) totidem etiam ad eorum valorem indigitandum requiruntur nomina: Et cum characteres valorem ſuum ratione decupla augeant (§. 42) non minus etiam nominibus, quibus hic valor locorum exprimitur, opus eſt.

Definitio.

45. Nomina characterum hæc ſunt 1 vnum, 2 duo, 3 tria, 4 quatuor, 5 quinque, 6 ſex, 7 ſeptem, 8 octo, 9 nouem indicat vnitates, & ſi 1 per cyphram 0 locum occupat ſecundum, tum 10 decem continet vnitates, & vnam *decadem* conſtituit. Quilibet horum characterum meris vnitatibus conſtat, atque eorum nomina eas indicant. Sic 1 vnum etiam vnam tantum exprimit vnitatem, 2 duo vnam + vnam, 3 tria, 2 + 1, 4 quatuor 3 + 1, 5 quinque 4 + 1 indicat vnitates & ita porro, vt ſubſequens numerus ex præcedenti cum addita vni-

vnitate originem ſuam habeat. Quemadmodum vero ex decem vnitatibus vna decas, ita etiam ex decadibus reliqui componuntur numeri. Duæ decades ſunt *viginti*, tres triginta, quatuor quadraginta, quinque quinquaginta, ſex ſexaginta, ſeptem ſeptuaginta, octo octoginta, nouem nonaginta dicuntur. Decem decades conſtituunt *centenarium*, decem centenarii millenarium, & ex mille millenariis *millio*, ex mille millenariis millionum *Billio*, ex mille millenariis billionum *trillio*, ex mille millenariis trillionum *quadrillio* &c. componitur.

Problema.

46. Decem numerationis decadicæ ſignis, numerum quatuor aut paucioribus conſtans ſignis ſcribere, aut ſcriptum enunciare.

Reſolutio.

1. In loco primo quilibet character natiuum ſuum retinet valorem & meras indicat vnitates, quapropter illuc etiam vnitates referri debent ſimplices. Sic 1 vnam 2 duas exprimit vnitates.

2. Character in loco ſecundo tot indicat decades, quot continet vnitates, quare eodem etiam decadum numerus referendus eſt. E. gr. 2 in loco primo duas vnitates, in ſecundo vero duas decades indicat, quas viginti vocant, & 4 in hoc loco, non quatuor vnitates, ſed totidem decades continet.

3. Character in loco tertio tot exprimit centenarios, quot continet vnitates, quare in hunc locum poni debent centenariorum numeri. E. gr. 2. in primo loco duas vnitates, in ſecundo duas decades, in tertio vero decem decades bis ſumptas, ſeu ducenta indicat. Sic 3, non tres vnitates nec decades, ſed decem decades ter ſumptas ſeu trecenta exponit.

4. Character in loco quarto, tot exponit millenarios, quot continet vnitates, quapropter etiam in hunc locum millenarii ſcribi debent. Quo vero quilibet character ſuum deſignatum locum acquirat loca vacua ſecundam §phum 22 cum cyphris impleri debent. Sic 3 in loco primo tres vnitates, in ſecundo tres decades, in tertio totidem centenarios & in quarto denique loco tria millia inſignit.

E. gr.

E. gr. in hac characterum ſerie 4 3 3 5, character 5 primo loco poſitus, natiuum ſuum valorem retinet, & meras indicat vnitates, character 3 qui in ſecundo loco inuenitur, decies tria, nimirum triginta indicat. Idem character 3 tertio loco conſtitutus valet centies tria, id eſt, trecenta, denique character 4 qui quarto loco ponitur, exponit quatuor millia, & tota ſeries ita enunciatur: quatuor millia trecenta & triginta quinque.

Demonſtratio.

Character maximus in loco primo, nouem continet vnitates (per hypoth.), & loci ſecundi character minimus vnam vnitatem plus indicat quam loci primi maximus (§. 30 n. 2). Cum vero nouem vnitates + vnam conſtituant decem (§. 45), pariter etiam inde, locus ſecundus valorem ſuum accipiat (§. 30 n. 2) locus hic ſecundus indicat decades.

Valor in loco tertio ex valore loci ſecundi in ſe ipſum ducto oritur (§. 30 n. 3). Iam ſi decem multiplicantur per decem factum eſt = centum: atque adeo locus tertius continet centenarios. Eodem pacto quartus locus exponit millenarios, qui enim oritur ex loco tertio per ſecundum locum multiplicato (§. 30 n. 4) locus tertius conſtat centenariis, ſecundus decadibus; & ſi centum per decem multiplicantur factum eſt = mille: quare quartus locus millenarios indicat.

Idem etiam hoc modo demonſtrari poteſt.

Ex paulo ante adducta ratione locus primus continet vnitates & ſecundus decades. Iam ſi 10 : 1 exponens eſt = 10 (§. 35 n. 2) qui ſemper dat valorem ſubſequentis loci, ſi per antecedentem multiplicatur (§. 40). Sume igitur hunc exponentem qui eſt = 10 multiplica per eum valorem loci ſecundi qui eſt = 10, factum erit = 100, hinc tertius locus indicat centenarios. Pari ratione exponens 10 per huius loci valorem = 100, ſi iterum multiplicatur, factum inde ortum eſt = 1000, quod valorem loci quarti exponit.

Quo vero res eo clarius ſub oculos cadat, vnius cuiusque loci valor, numerorum ſignis indicari & exponens rationis ſic inſcribi poteſt.

exponens rationis ==		10		10		10	
locorum valor =	1000	:	100	:	10	:	1

Corol-

Corollarium.

47. In numeratione decadica creſcit numerorum poteſtas ſemper ratione decupla. Vnde character in loco ſecundo decies tantundem valet quantum primo; tertio decies quantum ſecundo, atque adeo centies quantum primo; quarto decies tantundem quantum tertio, hinc centies quantum ſecundo & millies quantum primo; & tali modo in infinitum hæc obſeruatur locorum ratio, vt conſequens locus antecedentem decuplum contineat. Quod etiam vel ex ſubſequenti tabula, qua ordo valoris numerorum ad oculum demonſtratur ſatis cognoſci poterit;

centenarii decades vnitates	quadrillionum &c.
centenarii decades vnitates	millenariorum trillionum.
centenarii decades vnitates	Trillionum.
centenarii decades vnitates	millenariorum billionum.
centenarii decades vnitates	Billionum.
centenarii decades vnitates	millenariorum millionum.

Digitized by Google

centenarii decades vnitates	millionum.
centenarii decades vnitates	millenariorum.
centenarii decades vnitates	ſimplices.

Hypotheſis.

48. Quod ſi plura quam quatuor numerorum occurrant ſigna, tota illorum ſeries in certas periodos diſtribuenda eſt, aſſignando vnicuique periodo tria ſigna ſeu characteres, a dextra ſiniſtram verſus, excepta vero vltima periodo, in qua vnus aut alter character deeſſe poteſt. Et finita periodo ſecunda notatur illa vno, quarta duobus punctis aut virgulis, ſic finis ſextæ periodi tribus, octavæ, quatuor punctis &c. inſigniri aſſolet: ita vt finitis duabus periodis ſemper peculiare ſignum, quod milliones indicet, ipſis inſcribatur.

Problema.

49. Numerum quatuor ſigna transgredientem ſcribere aut ſcriptum enunciare.

Reſolutio.

Numerus præſcriptus ſecundum §phum præcedentem in certas periodos per commata diuidatur, & ita quidem vt finitis duabus periodis hoc ſemper peculiari ſigno indicetur. Sic fini periodi ſecundæ vnicum punctum, quartæ, duo, ſextæ, tria, octauæ, quatuor annecti debent puncta. Commata per millenarios, punctum per milliones, duo puncta per billiones, tria puncta per trilliones &c. enuncientur. Et character vnius cuiusque periodi, in loco tertio per centenarios, in ſecundo

do per decades, & in tertio denique loco per vnitates enunciętur.

E. gr. Inſequens numerus

4‴, 120, 356‴, 610, 454, 314′, 078

ita enunciari debet: quatuor trilliones, centum & viginti millia billionum vna cum trecentis quinquaginta ſex billionibus, ſexcenta & decem millia millionum vna cum quadringentis quinquaginta quatuor millionibus, trecenta & quatuordecim millia, ſeptuaginta octo.

Demonſtratio.

Hæc omnia ex præcedenti hypotheſi nec non ex collatione huius cum §pho 46. ſatis dilucide cognoſci poſſunt, & nulla vberiori demonſtratione indigent.

Scholion.

50. Sufficiant hæc de numeratione decadica. Quilibet optimus interpres, facta huius applicatione ad regulas generales §phi 30 & 38, ſimul etiam earum inter ſe conuenientiam non poteſt non concedere. Hac igitur abſoluta, conuertimus nos ad reliqua numerationis genera, quorum regulæ & exempla non minus ad ſupra expoſitas regulas generales applicari valent, quam paulo ante abſoluta numeratio decadica. Proximum igitur eſt, vt numerationis dyadicæ ſeu binariæ ex ſupra dicta ratione initium faciamus.

Problema.

51. Per numerationem binariam ſeu duo ſigna 0 & 1 numerare.

Reſolutio.

Hæc quamuis difficilis appareat, tamen non eſt niſi iis, qui neque huic diſciplinæ, nec reliquis numerationis generibus ad earum rationes cognoſcendas vnquam operam dederunt. Quod inſequens inſtituta reſolutio pluribus probat.

Siquidem character 1, in primo loco vnam, in ſecundo duas, in tertio quatuor, in quarto octo, in quinto ſedecim, in ſexto loco triginta & duas & ſic porro indicat vnitates. Quo vero hic character deſideratum locum acquirat, ipſi etiam tot cyphræ annectuntur, quot ad propoſitum ſufficiunt.

Demonſtratio.

Character loci primi maximus eſt = 1 (per hypoth.) hinc locus ſecundus indicat vnam plus vnam vnitatem (§.30 n. 2). & cum 1 + 1 ſit = 2, locus ſecundus continet binarios numeros, hoc eſt, 1 eſt in loco ſecundo = 2.

Valor characteris in loco tertio, fit ex valore loci ſecundi in ſe ipſum ducto (§. 30 n. 3). Iam ſi 2. 2 factum eſt = 4 hinc exponit locus tertius numeros quaternarios, & indicat 1 in loco tertio 4.

Valor in loco quarto naſcitur ex valore loci tertii per ſecundum multiplicato (§. 30 n. 4). Quod ſi igitur 4. 2 factum eſt = 8, qui numerus huius loci valorem indicat.

Pari ratione valorem loci quinti, ſexti, ſeptimi & reliquorum omnium cognoſcimus. Siquidem loci quarti valor, qui eſt = 8, ſi multiplicatur per valorem loci ſecundi = 2, factum eſt = 16, & conſtituit valorem loci quinti. Qui numerus 16 ſi iterum multiplicatur per 2, factum præbet quod eſt = 32 & valorem loci ſexti exprimit. Sic eſt 1 in loco quinto = 16 & in loco ſexto = 32 &c.

Corollarium.

52. Characterum valor in numeratione binaria, creſcit ſucceſſu locorum ratione dupla: hinc character in loco ſecundo duplum magis quantum primo; tertio duplum magis quantum ſecundo &c. indicat. Quod pluribus ſequens exponit tabula, qua ſimul characterum valor e regione per numerationem denariam explicatur.

1 = 1

Digitized by Google

1 = 1	100010 = 34
10 = 2	100011 = 35
11 = 3	100100 = 36
100 = 4	100101 = 37
101 = 5	100110 = 38
110 = 6	100111 = 39
111 = 7	101000 = 40
1000 = 8	101001 = 41
1001 = 9	101010 = 42
1010 = 10	101011 = 43
1011 = 11	101100 = 44
1100 = 12	101101 = 45
1101 = 13	101110 = 46
1110 = 14	101111 = 47
1111 = 15	110000 = 48
10000 = 16	110001 = 49
10001 = 17	110010 = 50
10010 = 18	110011 = 51
10011 = 19	110100 = 52
10100 = 20	110101 = 53
10101 = 21	110110 = 54
10110 = 22	110111 = 55
10111 = 23	111000 = 56
11000 = 24	111001 = 57
11001 = 25	111010 = 58
11010 = 26	111011 = 59
11011 = 27	111100 = 60
11100 = 28	111101 = 61
11101 = 29	111110 = 62
11110 = 30	111111 = 63
11111 = 31	1000000 = 64
100000 = 32	10000000 = 128
100001 = 33	100000000 = 256
	1000000000 = 512 &c.

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

Digitized by Google

Theorema.

53. In numeratione binaria, numerus 1011011 eſt = numero 91 numerationis decadicæ.

Demonſtratio.

Character 1, in primo loco eſt = 1
in ſecundo loco eſt = 2
in tertio loco eſt = 8
in quinto loco eſt = 16
in ſeptimo loco eſt = 64

cum vero 1 + 2 + 8 + 16 + 64 ſit = 91 (per addit.), numerus dyadicæ 1011011 eſt = 91. eodem modo omnes huius numerationis numeri eorumque valor haud difficile demonſtratur.

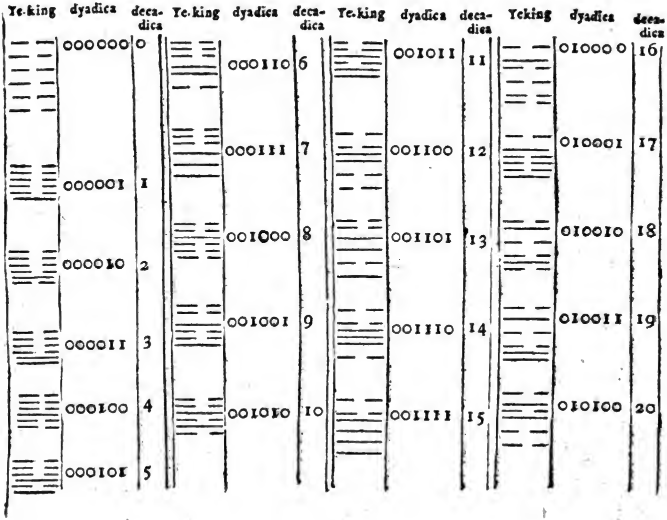
Scholion.

54. Priusquam ad reliqua numerationis genera transimus, huius dyadicæ auctorem, nec non ipſius peculiarem vſum, quem in explicatione cuiusdam myſterii præſtat, hic omnino præterire non poſſumus. Cuius numerationis inuentor quod ſit excellentiſſimus Dom. Leibnizius vir doctrina atque optimarum artium ſcientia eruditus neminem præterit. Hic ex ſua dyadica Chinenſibus librum explicauit, qui ab ipſis Ye-king dicebatur, & ex meris lineolis partim fractis partim non fractis ſeu integris compoſitus eſt. Imperator Fohi circa annum 2950 ante Chriſtum natum in China ſummum imperium tenens hunc librum exarauiſſe putatur. Et cum nemo inueniebatur, qui huius libri nodos ſolueret eiusque ficta arcana plane & accurate explicaret, variis inde etiam interpretationibus temporum ſucceſſu obnoxius fuit, & denique quaſi ſcriptum omnium myſteriorum plenum hic commemoratus liber habitus eſt. Sed collaudatus Leibnizius nobis huius myſterii accuratam reliquit explicationem atque ſatis aperte oſtendit, quod hic dictus liber Ye-king nihil arcani, ſed potius certum quoddam numerationis genus comprehendat, quo numeri ſucceſſu locorum ratione dupla creſcant, atque minus conſuetis ſignis, nimirum lineolis transuerſis exprimerentur. Cuius ex ſententia lineola fracta æquipararet cyphram 0 & non fracta ſeu integra conueniret characteri 1. Quoniam vero numeratio, qua

numeri

Digitized by Google

numeri ſe ratione dupla inuicem excipiunt, dyadicam præſertim conſtituit: hic liber Ye-king omnibus ex partibus etiam dyadicæ reſpondet & tota diſcrepantia tantum in variis numerorum ſignis ſita eſt, quæ vero nullius momenti eſt, ſiquidem numerorum ſigna, arbitraria audiunt (§. 17). Vtriusque autem numerationis conuenientia adhuc multo clarius ſub oculos cadet, quamprimum totam formam dicti myſterii contemplamur comparamusque eam cum numeratione binaria. Haud inconſentaneum igitur erit: ſpeciem totius libri dequo ſermo eſt hic interſerere & dyadicam e regione ponere, quo vna numeratio per alteram ex oculari comparatione eo facilius declarari valeat. Sic eſſet:



Ye-king	dyadica	decadica
	000000	0
	000001	1
	000010	2
	000011	3
	000100	4
	000101	5
	000110	6
	000111	7
	001000	8
	001001	9
	001010	10
	001011	11
	001100	12
	001101	13
	001110	14
	001111	15
	010000	16
	010001	17
	010010	18
	010011	19
	010100	20

Digitized by Google

Ye-king	dyadica	deca-dica	Yeking	dyadica	deca dica	Ye-king	dyadica	deca-dica	Ye-king	dyadica	deca-dica
	010101	21		100001	33		101101	45		111000	56
	010110	22		100010	34		101110	46		111001	57
	010111	23		100011	35		101111	47		111010	58
	011000	24		100100	36		110000	48		111011	59
	011001	25		100101	37		110001	49		111100	60
	011010	26		100110	38		110010	50		111101	61
	011011	27		100111	39		110011	51		111110	62
	011100	28		101000	40		110100	52		111111	63
	011101	29		101001	41		110101	53			
	011110	30		101010	42		110110	54			
	011111	31		101011	43		110111	55			
	100000.	32		101100.	44						

Et

Digitized by Google

Et cum tali modo hæc Chinenſium arcana eorumque ſigna, numerationi binariæ reſpondeant: nemo etiam hanc veram eſſe iſtius myſterii explicationem inficias ibit. Quicquid vero eorum ſit, ſatis eſt, nos a commemorato auctore didiciſſe, per duo ſigna numerare. Quod autem pari ratione, per tria ſigna numeratio commode inſtitui poſſit; ſubſequentia docebunt.

Problema.

55. Per tria ſigna 0, 1, 2, numerare.

Reſolutio.

Character 1 vnam & 2 duas vnitates in loco primo conſueto more indicat.

Iidem vero characteres in ſecundo loco numeros ternarios; in tertio nouenarios, in quarto cum ſeptenariis vicenarios & ſic porro exponunt. Sic 1 eſt in loco ſecundo = 3 in tertio = 9 in quarto eſt = 27. & in quinto eſt = 81 &c.

Demonſtratio.

Secundum regulas numericas vniuerſales quilibet character non ſolum in primo loco natiuum ſuum retinet valorem, ſed etiam valor loci ſecundi creſcit ex ſumma characteris maximi cui minimus additus eſt (§. 30 n. 1, 2);

Et valor characterum in tertio loco poſitorum oritur ex valore loci ſecundi in ſe ipſum ducto (§. 30 n. 3);

Quemadmodum etiam valor loci quarti ex valore loci tertii per valorem ſecundi loci multiplicati exiſtit (§. 30 n. 4);

Et cum hic in loco primo, character maximus ſit 2 (per hypoth.) valor loci ſecundi continet ternarios, quia 2 + 1 eſt = 3. Et 1 in loco ſecundo eſt = 3. character 2 eſt = 2. 3 = 6.

Pariter etiam cum character loci ſecundi eiusque valor 3 in ſe ipſum ductus ſit = 9 valor tertii loci continet nouenarios, quare 1 in tertio loco eſt = 9, & 2 eodem loco eſt = 18.

Sic etiam locus quartus cum ſeptenariis vicenarios indicat, quia 3. 9 dant factum quod eſt = 27. vnde 1 in hoc loco eſt = 27, & 2 eſt = 54.

Idem etiam ſatis apparet, ſi exponens rationis, qui hic eſt = 3 modo præſcripto per antecedentem terminum multi-

Digitized by Google

plicatur: tum factum, quod exinde ortum eſt, conſtituit valorem ſubſequentis loci, quod ſequentia docent:

exponens rationis = 3 = 3 = 3 = 3
valor locorum = 81 27. 9. 3. 1.

Corollarium.

56. Hac in numeratione ternaria creſcit numerorum poteſtas ſemper ratione tripla (§. 55). Vnde character in loco ſecundo ter tantundem valet quantum primo; tertio ter tantundem quantum ſecundo, & novies quantum primo; quarto ter tantundem quantum tertio, atque adeo nouies quantum ſecundo, & vicies ſepties quantum primo loco, & ita porro quod etiam ſequens docet Tabula:

1 = 1	1000 = 27	1222 = 53
2 = 2	1001 = 28	2000 = 54
10 = 3	1002 = 29	2001 = 55
11 = 4	1010 = 30	2002 = 56
12 = 5	1011 = 31	2010 = 57
20 = 6	1012 = 32	2011 = 58
21 = 7	1020 = 33	2012 = 59
22 = 8	1021 = 34	2020 = 60
100 = 9	1022 = 35	2021 = 61
101 = 10	1100 = 36	2022 = 62
102 = 11	1101 = 37	2100 = 63
110 = 12	1102 = 38	2101 = 64
111 = 13	1110 = 39	2102 = 65
112 = 14	1111 = 40	2110 = 66
120 = 15	1112 = 41	2111 = 67
121 = 16	1120 = 42	2112 = 68
122 = 17	1121 = 43	2120 = 69
200 = 18	1122 = 44	2121 = 70
201 = 19	1200 = 45	2122 = 71
202 = 20	1201 = 46	2200 = 72
210 = 21	1202 = 47	2201 = 73 &c.
211 = 22	1210 = 48	10000 = 81
212 = 23	1211 = 49	100000 = 243
220 = 24	1212 = 50	1000000 = 729 & ita porro.
221 = 25	1220 = 51	
222 = 26	1221 = 52	

Theo-

Theorema.

57. Hac in numeratione quam ternariam vocare poſſumus, numerus 1221 eſt = 52 numerationis decadicæ.

Demonſtratio.

In loco primo character ſuum valorem retinet & eſt 1 hic etiam = = 1

Locus ſecundus continet numeros ternarios atque adeo eſt 2 = = 6

Sic tertius locus indicat nouenarios & cum 2. 9 ſit = 18, etiam hic 2 = = 18

& 1 in loco quarto eſt = 27

Quoniam vero 1 + 6 + 18 + 27 ſint = 52.

Supra indicatus numerus 1221 etiam eſt = 52.

Problema.

58. Per quatuor ſigna 0, 1, 2, 3, numerationem inſtituere.

Reſolutio.

Si in numerando ad quaternarium peruenimus numerum, tum progredimur ad locum ſecundum, qui quaternarios exponit. Poſtquam vero hoc in loco deſignati characteres etiam abſoluti ſunt, tenditur ad tertium & ab hoc ad quartum & ſic porro locum, vbi in loco tertio character tot indicat denarios ſenariosque, quot continet vnitates & in quarto loco tot ſexagenarios quaternarios exponit, quot character vnitates comprehendit.

Demonſtratio.

Quoniam ſumma, quæ ex addendis nimirum charactere maximo & minimo oritur, valorem loci ſecundi conſtituit (§. 30 n. 2): & character maximus eſt = 3. qui + 1 eſt = 4. locus ſecundus continet quaternarios.

Valor loci tertii oritur ex ſecundo in ſe ipſum ducto. Et cum 4. 4 ſit = 16, locus tertius indicat denarios cum ſenariis.

Sic etiam exiſtit valor loci quarti, ſi tertius locus per ſecundum multiplicatur, quorum factum dat valorem huius loci quarti. Valor loci tertii hic eſt = 16 & ſecundi eſt = 4. Iam ſi 16. 4 factum eſt = 64. atque adeo hac in numeratione locus quartus ſexagenarios quaternarios exponit.

Tota res etiam hic vti in præcedentibus & reliquis nume-

Digitized by Google

rationis generibus eo ſita eſt, vt præſcripto modo per rationis exponentem progreſſio locorum inſtituatur, ſic
eſſet exponens rationis = 4 = 4 = 4
& locorum valor = 64. 16. 4. 1

Corollarium.

59. Creſcit hic characterum poteſtas locorum progreſſu ratione quadrupla. (§. 58). Hinc quilibet character loco ſecundo quater tantundem valet quantum primo; tertio quater quantum ſecundo & decies ſexies quantum primo, ſic quarto loco character quater valet quantum tertio, decies ſexies quantum ſecundo & ſexagies quater quantum primo &c. Vnde numeri ſe inuicem ſic excipiunt:

1 = 1	121 = 25	301 = 49
2 = 2	122 = 26	302 = 50
3 = 3	123 = 27	303 = 51
10 = 4	130 = 28	310 = 52
11 = 5	131 = 29	311 = 53
12 = 6	132 = 30	312 = 54
13 = 7	133 = 31	313 = 55
20 = 8	200 = 32	320 = 56
21 = 9	201 = 33	321 = 57
22 = 10	202 = 34	322 = 58
23 = 11	203 = 35	323 = 59
30 = 12	210 = 36	330 = 60
31 = 13	211 = 37	331 = 61
32 = 14	212 = 38	332 = 62
33 = 15	213 = 39	333 = 63
100 = 16	220 = 40	1000 = 64
101 = 17	221 = 41	1001 = 65
102 = 18	222 = 42	1002 = 66 &c.
103 = 19	223 = 43	10000 = 256
110 = 20	230 = 44	100000 = 1024
111 = 21	231 = 45	100001 = 1025 & ita porro.
112 = 22	232 = 46	
113 = 23	233 = 47	
120 = 24	300 = 48	

Theo-

Digitized by Google

Theorema.

60. Hac in numeratione eſt numerus 323 = numero 59

Demonſtratio.

Locus primus continet meras vnitates, hinc eſt in hoc loco 3	=	3
Locus ſecundus exponit quatenarios atque adeo ſi 2.4 factum eſt	=	8
Et tertius locus indicat denarios ſenarios, quod ſi igitur 3.16 factum eſt	=	48
Quoniam vero 3 + 8 + 48	=	59
Supra deſignatus numerus 323	=	59.

Scholion.

61. In Thracia olim hæc numerandi ratio in vſu fuit, quam Erhardus Weigelius non ſolum ſub nomine Tetracticæ in lucem edidit; ſed etiam quemlibet valorem characteris peculiari nomine indicauit: ſic vocatur ab eo character loci ſecundi 10 tetras, quaternio germanice Werff, & 20, biquatuor, Zwerff, 30 triquatuor Drerff & ita porro. Sed ſupra iam indicatum eſt, nos de characterum eorumque valorum nominibus minus eſſe ſollicitos. Hoc enim aliis relinquimus, & ſatis contenti ſumus, ſi characterum & locorum valor per conſueta ſigna numerationis decadicæ exprimi poſſunt.

Problema.

62. Quinque ſignis 0 1 2 3 4 numerum quemuis exprimere.

Reſolutio.

In loco primo progrediatur vsque ad numerum ſeu characterem = 4. Tum characteres in loco ſecundo indicant quinarios, in loco tertio vicenarios quinarios & quartus locus exponit centenarios vna cum vicenariis quinariis, & ita quidem vt valor vniuscuiusque loci toties ſumatur, quot character locum occupans continet vnitates.

Demonſtratio.

Valor locorum creſcit progreſſione geometrica (§. 38) & cognito valore loci ſecundi haud difficile etiam rationis exponens cognoſçitur, ſiquidem hic loci ſecundi valorem æquiparat (§. 40). Locus ſecundus hic indicat quinarios, quia numerus maximus eſt = 4 & minimus = 1 quorum ex additione valor loci ſecundi oritur. (§. 30 n. 1); atque adeo exponens rationis eſt = 5. qui per valorem loci ſecundi = 5 multiplicatur factum = 25 & indicat valorem loci tertii (§. 35. 38). qui tali modo vicenarios quinarios continet. In progreſſione geometrica oritur ſubſequens terminus ex antecedenti, ſi per rationis exponentem multiplicatur (§. 35 n. 1) antecedens terminus hic eſt valor loci tertii = 25. qui per exponentem = 5 ſi multiplicatur, ſubſequens terminus eſt = 125 & valorem loci quarti ſimul indicat, quare hic locus centenarios vna cum vicenariis quinariis exponit. Brevius ſic exprimitur

exponens rationis eſt	= 5	5 =	5 =	5	
valor locorum	=	125.	25.	5.	1

Corollarium.

63. Creſcit hic valor locorum ratione quintupla. Sic character in loco ſecundo quinquies tantundem indicat quantum primo, & in tertio loco quinquies quantum ſecundo, & vicies quinquies quantum primo, & character in loco quarto, quinquies tantundem valet quantum tertio; vicies quinquies quantum ſecundo; & centies vicies quinquies quantum primo. Quod multo clarius ex ſubſequenti characterum ordine apparebit:

1 = 1

Digitized by Google

1 = 1	131 = 41
2 = 2	132 = 42
3 = 3	133 = 43
4 = 4	134 = 44
10 = 5	140 = 45
11 = 6	141 = 46
12 = 7	142 = 47
13 = 8	143 = 48
14 = 9	144 = 49
20 = 10	200 = 50
21 = 11	201 = 51
22 = 12	202 = 52
23 = 13	203 = 53
24 = 14	204 = 54
30 = 15	210 = 55
31 = 16	211 = 56
32 = 17	212 = 57
33 = 18	213 = 58
34 = 19	214 = 59
40 = 20	220 = 60
41 = 21	221 = 61
42 = 22	222 = 62
43 = 23	223 = 63
44 = 24	224 = 64
100 = 25	230 = 65
101 = 26	231 = 66
102 = 27	232 = 67
103 = 28	233 = 68
104 = 29	234 = 69
110 = 30	240 = 70
111 = 31	241 = 71
112 = 32	242 = 72
113 = 33	243 = 73
114 = 34	244 = 74
120 = 35	300 = 75
121 = 36	301 = 76
122 = 37	302 = 77 &c.
123 = 38	1000 = 125
124 = 39	10000 = 725
130 = 40	100000 = 3625 & ita porro.

Theorema.

64. In hac numeratione quam quinariam appellitare poſſumus, eſt numerus 1320 = numero arithmeticæ decadicæ 210.

Demonſtratio.

Locus ſecundus cum quinarios exponat, eſt character 2. 5 = 10

Locus tertius continet vicenarios quinarios: quod ſi igitur 3. 25 = 75

Locus quartus indicat centenarios vna cum vicenariis quinariis, atque adeo eſt 1 = 125

Cum vero 10 + 75 + 125 = 210

Commemorati numeri 1320 = 210

Problema.

65. Per ſex ſigna 0 1 2 3 4 5 numerare.

Reſolutio.

Quilibet character in loco primo natiuum ſuum retinet valorem, aſt in loco ſecundo, tot indicat ſenarios, quot continet vnitates, & in loco tertio, tot tricenarios ſenarios quot vnitatibus conſtat, ſic in quarto loco, ducentenarios vna cum denariis ſenariis toties indicat, quot character vnitatibus compoſitus eſt.

Demonſtratio.

Quoniam character loci primi maximus eſt = 5. ex ſupra ſæpius adductis rationibus, quas in ſequentibus ſilentio prætertimus, valor loci ſecundi conſtat ſenariis.

Hic parit valorem loci tertii, ſi in ſemetipſum ducatur, quapropter 6. 6 = 36 & huius loci characteres tricenarios ſenarios indicant. Valor loci quarti exiſtit, ſi tertii & ſecundi loci poteſtates per ſe multiplicantur. Quod ſi igitur 6. 36 factum eſt = 216 quare locus quartus ducentenarios vna cum denariis ſenariis toties exponit, quot character continet vnitates.

Idem etiam demonſtrari valet ex progreſſione qua gaudet numeratio geometrica. Siquidem

rationis exponens eſt	=	6	= 6	= 6	
& locorum valor	=	216.	36.	6.	1

Corol-

Corollarium.

64. Huius numerationis valor creſcit progreſſu locorum ſemper ratione ſextupla. Quibus ex cauſis character in loco ſecundo ſexies tantundem valet quantum primo; in loco tertio ſexies quantum ſecundo & tricies ſexies quantum primo; quarto in loco ſexies tantundem quantum tertio; adeoque tricies ſexies quantum ſecundo & ducenties decies ſexies tantundem quantum primo. Quod etiam vel ex ſequenti ſpecie videre eſt.

1 = 1	44 = 28	131 = 55
2 = 2	45 = 29	132 = 56
3 = 3	50 = 30	133 = 57
4 = 4	51 = 31	134 = . . 58
5 = 5	52 = 32	135 = 59
10 = 6	53 = 33	140 = 60; &c.
11 = 7	54 = 34	1000 = 216
12 = 8	55 = 35	10000 = 1296
13 = 9	100 = 36	100000 = 7776 & ita porro.
14 = 10	101 = 37	
15 = 11	102 = 38	
20 = 12	103 = 39	
21 = 13	104 = 40	
22 = 14	105 = 41	
23 = 15	110 = 42	
24 = 16	111 = 43	
25 = 17	112 = 44	
30 = 18	113 = 45	
31 = 19	114 = 46	
32 = 20	115 = 47	
33 = 21	120 = 48	
34 = 22	121 = 49	
35 = 23	122 = 50	
40 = 24	123 = 51	
41 = 25	124 = 52	
42 = 26	125 = 53	
43 = 27	130 = 54	

Theorema.

Hac in arithmetica *ſenaria* numerus 2362 = 578 arithmeticæ decadicæ.

Demonſtratio.

In loco primo eſt 2 == 2

In ſecundo vero quilibet character tot indicat ſenarios, quot continet vnitates, hinc eſt 6 = 36

In tertio tot tricenarios ſenarios indicat, quot exprimit vnitates, hinc eſt 3 == 108

Et in quarto loco eſt 2 == 432

quia hic character tot ducentenarios denarios ſenarios indicat, quot vnitatibus conſtat. Quoniam vero 2 + 36 + 108 + 432 = 578.

etiam numerus 2362 == 578

Problema.

65. Per ſeptem ſigna 0123456 numerationem inſtituere.

Reſolutio.

In primo loco progrediatur vsque ad characterem 6. per hypoth. tum in ſecundo loco iterari debent characteres ſecundum numerorum quantitatem. Et quilibet character toties ſeptenarios indicat, quot continet vnitates. Pari ratione tranſimus ad tertium & quartum & ita porro locum. In tertio loco inueniuntur quadragenarii nouenarii, & in quarto, tricentenarii quadragenarii ternarii reperiuntur toties, quot character hunc locum occupans continet vnitates.

Scholion.

66. Hujus problematis reſolutio eodem modo poſſet demonſtrari, quo præcedentes omnes abſolutæ ſunt. Quoniam vero quilibet iſtius veritatem ex ſæpius allegatis §phis nec non ex comparatione antecedentium reſolutionum cum earum demonſtrationibus ſatis dilucide cognoſcere atque deriuare poterit: temporis jacturam faceremus & quaſi actum ageremus, ſi hujus & ſubſequentium præſertim problematum, quibus infra decem

decem ſignis numerationem inſtituere docetur, veritatem longa demonſtrationum ſerie] probare ſtuderemus.

Corollarium.

67. Hac in numeratione characteres ſe inuicem excipiunt, ratione ſeptupla. Quocirca character in loco ſecundo ſepties tantundem valet quantum primo; in loco tertio ſepties quantum ſecundo, & quadragies nouies quantum primo; ſic character in quarto loco valet ſepties tantundem quantum tertio, quadragies nouies quantum ſecundo, & trecenties quadragies ter, quantum primo, & ita porro vt ſubſequens locus ſemper ſepties valeat quantum antecedens. Quod pluribus hac indicatur forma:

1 = 1	35 = 26	102 = 51
2 = 2	36 = 27	103 = 52
3 = 3	40 = 28	104 = 53
4 = 4	41 = 29	105 = 54
5 = 5	42 = 30	106 = 55
6 = 6	43 = 31	110 = 56 &c.
10 = 7	44 = 32	1000 = 243
11 = 8	45 = 33	10000 = 2401
12 = 9	46 = 34	100000 = 16807
13 = 10	50 = 35	
14 = 11	51 = 36	
15 = 12	52 = 37	
16 = 13	53 = 38	
20 = 14	54 = 39	
21 = 15	55 = 40	
22 = 16	56 = 41	
23 = 17	60 = 42	
24 = 18	61 = 43	
25 = 19	62 = 44	
26 = 20	63 = 45	
30 = 21	64 = 46	
31 = 22	65 = 47	
32 = 23	66 = 48	
33 = 24	100 = 49	
34 = 25	101 = 50	

Digitized by Google

Theorema.

68. Huius numerationis *ſeptenaria*, numeri 5600 = numero 2009 arithmeticæ decadicæ.

Demonſtratio.

Cyphræ nihil per ſe indicant (§. 24) atque adeo eſt in loco primo Cyphra o = o

Nec non in ſecundo loco eſt o = o

Tertius vero locus continet quadragenarios nouenarios, vnde hoc loco character 6 = 294

Et quartus locus exponit trecentenarios quadragenarios ternarios, quapropter ſi character 5 hic toties ſumitur quot continet vnitates eſt = 1715

Quoniam vero 294 + 1715 = 2009

Etiam numerus 5600 = 2009

Problema.

69. Octo ſignis 0 1 2 3 4 5 6 7 numerum quemuis exponere.

Reſolutio.

Etiam hac in numeratione peruenimus vsque ad characterem 7 in loco primo, tum conuertimus nos ad locum ſecundum, tertium, quartum &c. Et quilibet character in ſecundo loco tot indicat octonarios, quot continet vnitates. Sic in loco tertio tot ſexagenarios quaternarios; & in quarto loco tot quingenarios duodenarios exponit, quot gaudet vnitatibus.

Corollarium.

70. Hæc numeratio ratione octupla valorem ſuum locorum ſucceſſu auget. Quare character in loco ſecundo octies tantundem valet quantum primo; in loco tertio octies tantundem quantum ſecundo, & ſexagies quater quantum primo; & character in loco quarto, octies tantundem valet quantum tertio, ſexagies quater quantum ſecundo, & quingenties duodecies tantundem quantum primo. Videatur ſequens characterum ordo;

1 = 1

1 = 1
2 = 2
3 = 3
4 = 4
5 = 5
6 = 6
7 = 7
10 = 8
11 = 9
12 = 10
13 = 11
14 = 12
15 = 13
16 = 14
17 = 15
20 = 16
21 = 17
22 = 18
23 = 19
24 = 20
25 = 21
26 = 22
27 = 23
30 = 24
31 = 25
32 = 26
33 = 27
34 = 28
35 = 29
36 = 30
37 = 31
40 = 32
41 = 33
42 = 34
43 = 35
44 = 36
45 = 37
46 = 38
47 = 39
50 = 40
51 = 41
52 = 42
53 = 43
54 = 44
55 = 45
56 = 46
57 = 47
60 = 48
61 = 49
62 = 50
63 = 51
64 = 52
65 = 53
66 = 54
67 = 55
70 = 56
71 = 57
72 = 58
73 = 59
74 = 60
75 = 61
76 = 62
77 = 63
100 = 64
1000 = 512
10000 = 4096 &c.

Theorema.

71. Numerus 653 eſt in arithmetica decadica = 427

Demonſtratio.

Quilibet character in loco primo ſuum valorem retinet, hinc eſt 3 = 3

Locus ſecundus continet octonarios hinc 5, etiam quinque octonarios indicat & eſt = 40

Locus tertius indicat ſexagenarios quaternarios quare character 6 = 384

Et cum 3 + 40 + 384 = 427

Etiam numerus 653 = 427.

Problema.

72. Per nouem ſigna 012345678 numerare.

Reſolutio.

Quoniam in loco primo character maximus eſt 8 tendimus ad ſecundum, ſi nouenarios exprimere cupimus, hoc enim loco character tot indicat nouenarios, quot continet vnitates.

Sic ad locum tertium referri debent characteres quorum quilibet toties octoginta & vnum indicare debet, quot continet vnitatem.

Et in loco quarto reperiuntur ſeptingenarii vna cum vicenariis nouenariis. Quare quilibet character totidem hic ſumendus eſt, ſeu ſubintelligi debet, quot continet vnitates.

Corollarium.

73. In numeratione nouenaria creſcit numerorum poteſtas ſucceſſu locorum ratione noncupla. Quapropter character in loco ſecundo nouies tantundem valet quantum primo; & in loco tertio nouies quantum ſecundo, & octogies ſemel quantum primo; ſic character in loco quarto nouies tantundem valet quantum tertio, octogies ſemel quantum ſecundo & ſeptingenties vicies nouies, quantum primo. Idem etiam hoc ſchema pluribus indicat

1 = 1

Digitized by Google

1 = 1	37 = 34
2 = 2	38 = 35
3 = 3	40 = 36
4 = 4	41 = 37
5 = 5	42 = 38
6 = 6	43 = 39
7 = 7	44 = 40
8 = 8	45 = 41
10 = 9	46 = 42
11 = 10	47 = 43
12 = 11	48 = 44
13 = 12	50 = 45
14 = 13	51 = 46
15 = 14	52 = 47
16 = 15	53 = 48
17 = 16	54 = 49
18 = 17	55 = 50
20 = 18	56 = 51
21 = 19	57 = 52
22 = 20	58 = 53
23 = 21	60 = 54
24 = 22	61 = 55
25 = 23	62 = 56
26 = 24	63 = 57
27 = 25	64 = 58
28 = 26	65 = 59
30 = 27	66 = 60
31 = 28	67 = 61
32 = 29	68 = 62
33 = 30	70 = 63 &c.
34 = 31	100 = 81
35 = 32	1000 = 729
36 = 33	10000 = 6561 & ita porro.

Theo-

Theorema.

74. Numerus 5640 = 4167

Demonſtratio.

Locus ſecundus continet nouenarios, hinc character 4 = 36

In loco tertio character toties indicat octoginta & vnum, quoties continet vnitatem hinc 6 = 486

Et locus quartus exponit ſeptingenarios vna cum vicenariis nouenariis, quare ſi 5. 729 factum eſt = 3645

Quoniam vero 36 + 486 + 3645 = 4167

Etiam commemoratus numerus 5640 = 4167

Scholion.

75. Tali modo indicatum eſt, numerationem decadicam non tam ſummæ neceſſitatis eſſe, vt numerorum computatio, paucioribus quam decem ſignis inſtitui minus valeat. Quemadmodum vero ſine omni negotio fieri poteſt, vt numeratio vario modo ſuſcipiatur, ita etiam, aquam e pumice non poſtulant, qui eodem pacto arithmeticam decadicam transgredi & pluribus quam decem numerorum ſignis vti conantur. Weidlerum cum duodecim ſignis, Harsdorferum cum viginti quatuor litteris alphabeticis numerauiſſe, nec non Carolum XII. calculum ſexagenarium excogitauiſſe relatum legimus. Quamuis vero neque auctorum commemoratorum exempla vidimus, nec numerationis leges ab ipſis percepimus: ſine magno tamen labore ſecundum ſupra explicatas numerationum leges generales, inueniemus ſpeciales, quarum opere numeratio pluribus quam decem ſignis gaudens æque commode ac decem ſignis carens inſtitui valet. Priusquam vero hoc docetur: de characteribus etiam nouis quibus adhuc vtendum eſt inter nos conueniamus neceſſe eſt. Nonnulli arbitrantur, quod ſupra §pho 26 dictum eſt, quemlibet characterem ex tot lineolis eſſe compoſitum, quot indicat vnitates. Unde chara-

cter

ĉter 8 octo, 9 nouem lineolis conſtare debet. Et tali modo character qui decem vnitates, etiam decem lineolis, qui vndecim, etiam vndecim lineolis, qui duodecim & ita porro vnitates indicare debet, totidem etiam lineolis circumſcriptus ſit, conuenit. Nouem lineolæ + 1 conſtituunt decem, hinc character q/ = 10. pari modo ſit q_4 = 11 & cum 6 + 6 ſeu 2. 6 = 12 character 2 coniungatur cum 6, qui hanc formam 6^2 repræſentet & = 6^2 = 12. haud abſimili ratione plures numerorum characteres componi poſſunt. Cui vero hæc ſigna non placent, alia adhibeat, & optima quæuis erunt, quæ non magnum implent ſpatium, atque ſcriptu & cognitu faciliora ſunt. Qui magis litteris alphabeticis fauent, eas etiam loco characterum applicare poſſunt. Noſmet ipſi iis etiam vtemur, præſertim iis numerationibus, quibus plures noui characteres requiruntur. Inuentio enim aliorum characterum ſemper variis iudiciis obnoxia eſt, & elementorum vſus haud inconſuetus eſt, ſiquidem litteræ alphabeti ſæpenumero etiam ab aliis in numeratione decadica inſtar characterum vſurpari ſolent. Quid & quantum vero quilibet character ſeu quælibet littera indicet, neque minus qua ratione ſucceſſu locorum creſcat, ſequentia problemata pluribus docebunt.

Problema.

74. Per vndecim ſigna 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 q/ numerationem inſtituere.

Reſolutio.

Quilibet character in loco primo natiuum ſuum retinet valorem, & abſolutis eorum digitis, quorum maximus eſt q/ qui decem vnitates comprehendit, conuertimus nos ad locum ſecundum.

Hoc in loco character tot vndenarios indicat, quot continet vnitates.

Sic characteres in loco tertio, toties centum & viginti vnum indicant, quot comprehendunt in loco primo vnitates.

Et in loco quarto characteres toties mille vna cum trecentis triginta & vnum indicant, quot conſtant vnitatibus.

Digitized by Google

Demonſtratio.

Character in loco primo maximus conſtat decem vnitatibus (per hypoth.) Quoniam vero locus ſecundus valorem ſuum acquirit ex ſumma characteris maximi & minimi (§. 30 n. 2) quæ hic = 11. locus ſecundus etiam vndenarios exponit. Valor in loco tertio oritur ex valore loci ſecundi in ſe ipſum ducto (§. 30 n. 3) quod ſi igitur 11. 11 factum eſt = 121 quem numerum etiam in hoc loco characteres toties exprimunt, quot continent vnitates.

Sic etiam valor in quarto loco oritur ex valore loci tertii per valorem loci ſecundi multiplicato. Si igitur hoc caſu 121. 11 factum eſt = 1331. qui numerus etiam huius loci valorem indicat & toties ſub intelligi debet, quot character continet vnitates.

Hoc etiam ex progreſſione geometrica, qua ſe inuicem characteres excipiunt, demonſtrari valet. Locus ſecundus exponit ex ſupra adducta ratione vndenarios, ſi igitur 11 : 1. exponens rationis eſt = 11. Hic conſtituit valorem ſubſequentis loci, ſi per antecedentem multiplicatur (§. 35 35 & 40) quapropter ſi exponens rationis = 11 multiplicatur per loci ſecundi valorem 11 factum eſt = 121. quodſi iterum multiplicatur per exponentem rationis = 11 factum eſt = 1331 & hoc, valorem loci quarti, illud vero in tertio loco conſtituit. Breviſſime etiam ſic exponitur:

exponens rationis = 11 = 11 = 11.
valor locorum = 1331. 121. 11. 1.

Corollarium.

75. Hac in numeratione valor locorum creſcit ratione vndecupla. Quare etiam character in loco ſecundo vndecies tantundem valet, quantum primo, & in loco tertio, vndecies quantum ſecundo, centies vicies ſemel quantum primo. Sic character in loco quarto vndecies tantundem valet, quantum tertio, centies vicies ſemel quantum ſecundo, & millies trecenties & tricies ſemel quantum primo. Qui numerorum ordo vel ex hoc etiam cognoſci poteſt.

1 = 1

Digitized by Google

1	= 1	32	= 35
2	= 2	33	= 36
3	= 3	34	= 37
4	= 4	35	= 38
5	= 5	36	= 39
6	= 6	37	= 40
7	= 7	38	= 41
8	= 8	39	= 42
9	= 9	3q/	= 43
q/	= 10	40	= 44
10	= 11	41	= 45
11	= 12	42	= 46
12	= 13	43	= 47
13	= 14	44	= 48
14	= 15	45	= 49
15	= 16	46	= 50
16	= 17	47	= 51
17	= 18	48	= 52
18	= 19	49	= 53
19	= 20	4q/	= 54
1q/	= 21	50	= 55
20	= 22	51	= 56
21	= 23	52	= 57
22	= 24	53	= 58
23	= 25	54	= 59
24	= 26	55	= 60
25	= 27	56	= 61
26	= 28	57	= 62
27	= 29	58	= 63
28	= 30	59	= 64
29	= 31	5q/	= 65
2q/	= 32	100	= 121
30	= 33	1000	= 1331
31	= 34	10000	= 14641

Theorema.

76. Numeri q/960 = 14365 arithmeticæ decadicæ.

Demonſtratio.

Character 6 in loco ſecundo tot indicat vndenarios, quot continet vnitates, & quia ſex vnitatibus conſtat = 66

Character 9 in tertio loco multiplicandus eſt per numerum 121 hic enim valorem huius loci exponit & tali modo, 9 = 1089

Et pari ratione character q/ qui decem vnitatibus conſtat, multiplicatur per valorem loci quarti 1331 & eſſet q/ in hoc loco = 13310

Et cum 66 + 1089 + 13310 = 14365

etiam characteres q/960 = 14365

Problema.

77. Per duodecim numerorum ſigna 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 q/ q, numerationem inſtituere.

Reſolutio.

In primo loco characteres natiuum ſuum retinent valorem, atque eorum maximus vndecim continet vnitates. Quapropter ad ſecundum locum non prius transgredi debemus, quam ſi numerus vndenarium ſuperat.

Character in loco ſecundo exponit duodenarios, & quidem toties, quot continet vnitates.

In tertio loco character centenarios vna cum quadragenariis quaternariis toties indicat, quot continet vnitates.

Et in quarto loco tot millenarios vna cum ſeptingenariis vicenariis octonariis exponit character, quot vnitatibus conſtat.

Demonſtratio.

Huius reſolutionis veritas ſine magno negotio etiam ex præcedentibus demonſtrationibus cognoſci poteſt.

Corollarium.

78. Numerorum valor creſcit ſucceſſu locorum ratione duodecupla. Unde character in loco ſecundo, duodecies tan-

tun-

Digitized by Google

tundem valet quantum primo; tertio duodecies tantundem quantum ſecundo & centies quadragies quater quantum primo; quarto duodecies quantum tertio, centies quadragies quater quantum ſecundo & millies ſeptingenties vicies octies quantum primo. Et tali modo eſt:

1 = 1	28 = 32	53 = 63
2 = 2	29 = 33	54 = 64
3 = 3	$29_{/}$ = 34	55 = 65
4 = 4	29_{4} = 35	56 = 66
5 = 5	30 = 36	57 = 67
6 = 6	31 = 37	58 = 68
7 = 7	32 = 38	59 = 69
8 = 8	33 = 39	$59_{/}$ = 70
9 = 9	34 = 40	59_{4} = 71
$9_{/}$ = 10	35 = 41	60 = 72
9_{4} = 11	36 = 42	100 = 144
10 = 12	37 = 43	1000 = 1728
11 = 13	38 = 44	10000 = 19736
12 = 14	39 = 45	
13 = 15	$39_{/}$ = 46	
14 = 16	39_{4} = 47	
15 = 17	40 = 48	
16 = 18	41 = 49	
17 = 19	42 = 50	
18 = 20	43 = 51	
19 = 21	44 = 52	
$19_{/}$ = 22	45 = 53	
19_{4} = 23	46 = 54	
20 = 24	47 = 55	
21 = 25	48 = 56	
22 = 26	49 = 57	
23 = 27	$49_{/}$ = 58	
24 = 28	49_{4} = 59	
25 = 29	50 = 60	
26 = 30	51 = 61	
27 = 31	52 = 62	

Digitized by Google

Theorema.

79. Numerus 67 9/ 9_4 = 10507.

Demonſtratio.

In loco primo character natiuum ſuum valorem retinet & eſt 9/ = 11

Locus ſecundus exponit duodenarios, hinc character 9/ qui decem vnitatibus conſtat per 12 multiplicatur, & eſt = 120

Tertius locus tot indicat centenarios quadragenarios quaternarios, quot character continet vnitates, hinc 7 in hoc loco = 1008

Et locus quartus exponit millenarios vna cum ſeptingenariis vicenariis octonariis, quare ſi 6. 1728 factum eſt = 9368.

Atque adeo eſt numerus 67 9/ 9_4 = 11 + 120 + 1008 + 9368. quoniam vero huius ſumma eſt = 10507. (per addit) etiam numerus 67 9/ 9_4 = 10507.

Problema.

80. Per tredecim ſigna 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 9/ 9_4 6ª numerare.

Reſolutio.

In loco primo numerus digitorum maximus continet duodecim vnitates, quare etiam characteres hunc numerum non excedentes ad hunc locum primum referri debent.

In loco ſecundo character ponitur, qui denarios ternarios indicare debet. Siquidem toties hoc in loco character denarios ternarios indicat, quot continet vnitates.

Character in loco tertio, toties indicat centenarios vna cum ſexagenariis nouenariis, quot continet vnitates.

Et in quarto loco numerus; bis mille centum & nonaginta ſeptem toties multiplicatus ſubintelligitur, quot character continet vnitates.

Corollarium.

81. Characterum valor hac in numeratione ſucceſſu locorum

Digitized by Google

rum, creſcit ratione terdecupla. Et tali modo character in loco ſecundo tredecies tantundem valet quantum primo; in tertio loco tredecies quantum ſecundo, & centies ſexagies nouies quantum primo; in quarto loco character tredecies tantundem valet quantum tertio, centies ſexagies nouies quantum ſecundo & bis millies centies nonagies ſepties quantum primo. Iuuat etiam hic ſignificatum eorum & quomodo ſe inuicem excipiunt exponere.

1 = 1		23 = 29		45 = 57	
2 = 2		24 = 30		46 = 58	
3 = 3		25 = 31		47 = 59	
4 = 4		26 = 32		48 = 60	
5 = 5		27 = 33		49 = 61	
6 = 6		28 = 34		49_4 = 62	
7 = 7		29 = 35		49_1 = 63	
8 = 8		29_1 = 36		46^2 = 64	
9 = 9		29_4 = 37		50 = 65	
9_1 = 10		26^2 = 38		51 = 66	
9_4 = 11		30 = 39		52 = 67	
6^2 = 12		31 = 40		53 = 68	
10 = 13		32 = 41		54 = 69	
11 = 14		33 = 42		100 = 169	
12 = 15		34 = 43		1000 = 2197	
13 = 16		35 = 44		10000 = 28561 &c.	
14 = 17		36 = 45			
15 = 18		37 = 46			
16 = 19		38 = 47			
17 = 20		39 = 48			
18 = 21		39_1 = 49			
19 = 22		39_4 = 50			
19_1 = 23		36^2 = 51			
19_4 = 24		40 = 52			
16^2 = 25		41 = 53			
20 = 26		42 = 54			
21 = 27		43 = 55			
22 = 28		44 = 56			

Theo-

Digitized by Google

Theorema.

82. Numerus $6'q_4 q/3$ = numero 28356 numerationis decadicæ.

Demonſtratio.

In loco primo quilibet character natiuum ſuum valorem retinet & 3 = 3

In ſecundo loco character toties tredecim indicat, quot character continet vnitates. Quare ſi $q/$. 13 factum eſt = 130

In tertio loco character continet centenarios una cum ſexagenariis nouenariis. Quodſi igitur character $q/$ qui eſt = 11 multiplicatur per 169 factum eſt = 1859

Et in quarto loco toties character duo millia centum & nonaginta ſeptem indicat, quot continet vnitates. Si igitur character 6' qui eſt = 12 per indicatum numerum multiplicatur, factum eſt = 26364

Quoniam vero 3 + 130 + 1859 + 26364 = 28356

etiam numerus $6'q_4 q/3$ = 28356

Scholion.

83. Hic quidem finem rei imponere poſſemus, quilibet enim ex præcedentibus ſatis clare perſpicit quod ſigna numerorum non ſolum pro arbitrio excogitari augerique poſſint: ſed etiam ordo quo ſe invicem excipiunt haud difficile inueniri valeat. Quo vero promiſſo noſtro ſatisfaciamus, paucis exponemus quibus modis ope litterarum alphabeti numeratio inſtitui poſſit. Mens non eſt, priora exempla iterum repetere, operam fruſtra contereremus & quaſi nugas ageremus, ſi denuo omnia numerationis genera iam abſoluta recitarentur. Hoc enim pacto, nihil niſi characteres mutarentur, & ordo quo ſe inuicem excipiunt, ſemper maneret idem. Itaque eum in finem alphabeti litteras vſurpare conuenit, quo in ſubſequentibus pluribus nouis & inconſuetis numerorum characteribus ſuperſededere poſſimus. Ac ne longum fiat, vnum & alterum exemplum tantum in medium prolaturi ſumus.

Pro-

Digitized by Google

Problema.

84. Per quindecim alphabeti litteras; **a b c d e f g h i k l m n o p** quemuis numerum exprimere.

Reſolutio.

In primo loco litteræ elementariæ vti numerorum digiti conſiderari debent & eſt a = 1. b = 2. c = 3. d = 4. e = 5. f = 6. g = 7. h = 8. i = 9. k = 10. l = 11. m = 12. n = 13. p = 14. & littera o eſt inſtar cyphræ, quæ loca vacua implere debet.

Quamprimum vero in loco primo vsque ad litteram p = 14. peruenimus nos etiam conuertimus ad locum ſecundum.

Qui denarios quinarios exponit, quem numerum quælibet littera toties indicat, quot continet vnitates. E. gr. a eſt in loco ſecundo = 15, b = 30, c = 45 &c.

Pari modo quælibet litera in loco tertio indicat ducentenarios vna cum vicenariis quinariis. Sic in hoc loco eſt a = 225, b = 450, c = 675 &c.

Et in quarto loco toties tria millia trecenta & ſeptuaginta quinque exprimuntur, quot littera ſeu character continet vnitates. Sic a = 3375, b = 6750, c = 10125.

Demonſtratio.

Character maximus hic per litteram p exprimitur & eſt = 14. quapropter etiam omnes numeri quatuordecim non excedentes ad primum hunc locum referri debent. Et quælibet littera ſuum quaſi natiuum valorem vti characteres in hoc loco retinet.

Valor loci ſecundi exiſtit, ſi characteri loci primi maximo additur minimus (§. 30 n. 2). Character maximus hic per litteram p exprimitur, & eſt = 14 cui ſi additur minimus = a = 1 ſumma eſt = 15. Et tali modo valor loci ſecundi conſtat denariis quinariis.

 Valor

Valor in loco tertio ex valore loci ſecundi in ſe ipſum ducto oritur (§. 30 n. 3) quod ſi igitur 15. 15 factum eſt = 225. quare hic locus ducentenarios vicenarios quinarios exponit.

Sic valor loci quarti exiſtit ex valore loci tertii per ſecundum multiplicato (§. 30 n. 4) quapropter ſi 225 multiplicantur per 15 factum eſt = 3375. & quælibet littera in hoc loco poſita, totidem hunc numerum indicat, quot continet vnitates.

Corollarium.

85. Characterum ſeu litterarum valor creſcit ſucceſſu locorum ratione decupla vna cum quintupla. Quare Character in loco ſecundo decies quinquies tantundem valet quantum primo; in loco tertio decies quinquies quantum ſecundo & ducenties vicies quinquies quantum primo. In quarto loco character decies quinquies tantundem valet quantum tertio, ducenties vicies quinquies quantum ſecundo, & termillies trecenties ſeptuagies quinquies quantum primo. Quem valorem ſequens tabula pluribus exponit.

a = 1	ao = 15
b = 2	aa = 16
c = 3	ab = 17
d = 4	ac = 18
e = 5	ad = 19
f = 6	ae = 20
g = 7	af = 21
h = 8	ag = 22
i = 9	ah = 23
k = 10	ai = 24
l = 11	ak = 25
m = 12	al = 26
n = 13	am = 27
p = 14	an = 28

ap = 29

ap = 29
bo = 30
ba = 31
bb = 32
bc = 33
bd = 34
be = 35
bf = 36
bg = 37
bh = 38
bi = 39
bk = 40
bl = 41
bm = 42
bn = 43
bp = 44
co = 45
ca = 46
cb = 47
cc = 48
cd = 49
ce = 50
cf = 51
cg = 52
ch = 53
ci = 54
ck = 55
cl = 56
cm = 57
cn = 58
cp = 59
do = 60
da = 61
db = 62
dc = 63
dd = 64
de = 65
df = 66
dg = 67
dh = 68
di = 69
dk = 70
dl = 71
dm = 72
dn = 73
dp = 74
eo = 75
ea = 76
eb = 77
ec = 78
ed = 79
ee = 80
ef = 81
eg = 82
eh = 83
ei = 84
ek = 85
el = 86
em = 87
en = 88
ep = 89
fo = 90
a00 = 225
a000 = 3375
a0000 = 50625

Digitized by Google

Theorema.

86. Numerorum litteræ p l m h = 5 numero 49913.

Demonſtratio.

In loco primo quælibet littera ſuum valorem retinet & eſt h = 8

Locus ſecundus tot indicat denarios quinarios, quot character continet vnitates. m = 12. ſi multiplicatur per 15, factum eſt = 180

In loco tertio reperiuntur ducentenarii vicenarii quinarii. Littera l = 11. quare ſi 225. 11 factum eſt = 2475

Et character in loco quarto toties tria millia vna cum trecentis & ſeptuaginta quinque indicat, quot continet vnitates. Littera p = 14. ſi multiplicatur per 3375 factum eſt = 47250

Quoniam vero 8 + 180 + 2475 + 47250 = 49913. etiam litteræ p l m h = 49913.

Problema.

87. Per viginti quatuor litteras elementarias. a b c d e f g h i k l m n p q r s t u w x y o numerare.

Reſolutio.

Quemadmodum in primo loco paulo antecedentis problematis, denarium quaternarium numerum transgredi non permittebatur, ſic in hoc numerationis genere per viginti tres litteras, totidem etiam vnitates ſimplices in loco primo exprimuntur. Litteræ alphabeti quatuordecim priores, eodem ordine eundem etiam valorem quo §pho 84 gaudent hic in loco primo habent. Et litteram p, excipiunt cum aſſignato valore q = 15, r = 16, s = 17, t = 18, v = 19, w = 20, x = 21, y = 22, z = 23. & littera o hic etiam æquiparat cyphram 0, & pari ratione qua in reliquis numerationis generibus vſurpanda venit.

Abſoluta vero hac litterarum ſerie in loco primo pro vnius cuiusuis ſcopo, ad ſecundum & ſubſequentia loca tranſitur.

In

Digitized by Google

In loco ſecundo quælibet littera tot indicat vicenarios quaternarios, quot continet vnitates. E. gr. a in hoc loco = 24, b = 48, c = 72 &c.

In loco tertio indicat littera tot quingenarios vna cum ſeptuagenariis ſenariis, quot continet vnitates. Quare in hoc loco eſt a = 576, b = 1152, c = 1728 &c.

Et in loco quarto, toties multiplicantur tredecim millia numerorum vna cum octingentis & viginti quatuor, quot littera alias in primo loco exprimit vnitates, ſic a = 13824, b = 27648, c = 41472 &c.

Demonſtratio.

Cuius rei veritas hic etiam ex iis ipſis §phis, quibus reliqua omnia demonſtrata venerunt, non poteſt non deriuari. Pari ratione, qua præcedentis problematis reſolutio ex hypotheſi §phi 30, huius conuenientiam præſertim ex §pho 38 non minus ſufficienter probaturi ſumus: Quia character loci primi maximus viginti & tres vnitates indicat ſimplices, ſine longiori demonſtratione etiam nemo non concedet, quod locus ſecundus vicenarios quaternarios contineat, & in hac progreſſione rationis exponentem æquiparet. Rationis exponens eſt igitur = 24. Hic dat valorem ſubſequentis loci, ſi per antecedentem multiplicatur. (§. 40) Quapropter ſi rationis terminus per valorem loci ſecundi = 24. aut quod idem eſt, per ſe ipſum multiplicatur, factum eſt = 576. Quod ſi hoc iterum multiplicatur per rationis terminum = 24. factum ex eo ortum eſt = 13824. Quorum hoc valorem loci quarti, illud vero tertii conſtituit.

Corollarium.

88. Characterum ſeu litterarum valor creſcit ſemper ſucceſſu locorum ratione vigecupla vna cum quadrupla. Itaque character loci ſecundi vicies quater tantundem valet quantum primo; & in loco tertio vicies quater quantum ſecundo atque ita quingenties ſeptuagies ſexies quantum primo. In loco quarto character vicies quater tantundem valet quantum tertio, atque ita quingenties ſeptuagies ſexies quantum ſecundo,

Digitized by Google

do, adeoque ter deoies millies octingenties vicies quater quantum primo. Et ſic in infinitum ea obſeruatur locorum ratio. Superuacaneum eſt, hic iterum valorem quem litteræ in primo loco poſſident repetere. Quapropter ad locum ſecundum & reliqua properamus, indicamusque vti in præcedentibus tactum eſt, qua ratione numerorum litteræ in quolibet loco valorem ſuum augent; quare:

ao = 24	ay = 46	bw = 68
aa = 25	az = 47	bx = 69
ab = 26	bo = 48	by = 70
ac = 27	ba = 49	bz = 71
ad = 28	bb = 50	co = 72
ae = 29	bc = 51	ca = 73
af = 30	bd = 52	cb = 73
ag = 31	be = 53	cc = 74
ah = 32	bf = 54	cd = 75
ai = 33	bg = 55	ce = 76
ak = 34	bh = 56	cf = 77
al = 35	bi = 57	cg = 78
am = 36	bk = 58	ch = 79
an = 37	bl = 59	ci = 80
ap = 38	bm = 60	ck = 81
aq = 39	bn = 61	cl = 82
ar = 40	bp = 62	cm = 83
as = 41	bq = 63	cn = 84
at = 42	br = 64	a00 = 576
av = 43	bs = 65	a000 = 13824
aw = 44	bt = 66	b000 = 27648
ax = 45	bv = 67	c000 = 41472
		a0000 = 331776

Theo-

Theorema.

89. Numerorum litteræ zyxv $=$ 331167.

Demonſtratio.

In loco primo quælibet littera ſuum etiam valorem retinet quare eſt v $=$ 19

In ſecundo loco character ſeu littera toties indicat viginti quatuor, quot continet vnitates, hinc ſi littera x quæ eſt $=$ 21 per 24 multiplicatur factum eſt $=$ 524

In tertio loco character toties indicat quingentos & ſeptuaginta ſex, quot continet vnitates littera y=22. Si multiplicatur per 576. factum eſt $=$ 12672

Sic in quarto loco character toties indicat tredecim millia vna cum octingentis viginti quatuor, quot character continet vnitates, quare ſi littera z quæ eſt = 23 multiplicatur per 13824. factum eſt $=$ 317952.

Quoniam vero 19 + 524 + 12672 + 317952 $=$ 331167 etiam zyxv $=$ 331167

Scholion.

90. Mercatores ad deſignanda mercium pretia præſertim litteris alphabeti characterum inſtar vti ſolent. Quo vero nemo litterarum valorem cognoſcat, non ſemper eodem ordine quo in ſcholis diſcuntur & ſupra notatæ ſunt, applicantur. Littera enim, quæ apud unum duas aut tres, apud alterum quatuor aut quinque poteſt indicare vnitates. Sic etiam quidam nouem priores, alter poſteriores litteras, vel certum quoddam verbum, quod decem litteris conſtat, vt: Morgenthau (1 2 3 4 5 6 7 8 9 0) &c. eligit, quibus numeros exprimere valeat. Noli vero arbitrari, ipſos etiam, qui tali modo numerorum characteres conſuetos permutant, ſimul etiam numerationis decadicæ ordinem transgredi. Quemadmodum hoc non neceſſario cum elementorum vſu coniunctum eſt, ita plurimos etiam reliqua numerationis genera fugiunt. Totum rei diſcrimen eo ſitum eſt, vt loco decem conſueta ſigna numerorum, totidem alphabeti litteræ ad numeros exprimendos vſurpent. Reliqua vero omnia regulis numerationis ſic dictæ decadicæ reſpondeant.

Scho-

Digitized by Google

Scholion.

91. Priusquam vltima rei imponatur manus, adhuc vnico exemplo indicabimus, quibus modis etiam cum triginta ſignis numeratio inſtitui poſſit. Quoniam vero viginti quatuor tantum habemus in lingua vernacula, litteras elementarias, quibus totidem vnitates exprimere poſſumus, deficientes adhuc litteras ex græcorum alphabeto ſumere licebit. Sit igitur $\alpha=24$ $\beta=25$ $\gamma=26$ $\delta=27$ $\epsilon=28$ $\zeta=29$.

Problema.

92. Per triginta ſigna a b c d e f g h i k l m n p q r s t v w x y z $\alpha \beta \gamma \delta \epsilon \zeta$. o. numerationem inſtituere.

Reſolutio.

Eodem ordine quo in problemate inueniuntur litteræ, vnitates etiam in primo loco indicant & cum $\zeta=29$ & characterem maximum conſtituat, ad locum ſecundum non prius tranſire poſſumus, quam datus numerus viginti nóuem vnitates ſuperat. Hac vero litterarum ſerie abſoluta in loco primo,

In ſecundo loco quælibet littera toties indicat triginta, quot continet vnitates, quare a = 30, b = 60, c = 90 &c.

In tertio loco quælibet littera toties indicat nongenta quot, continet vnitates ergo, a = 900, b = 1800 &c.

In loco quarto quælibet littera toties viginti ſeptem millia indicat, quot continet vnitates, ſic a = 27000, b = 54000 &c.

Corollarium.

93. Hac in numeratione characterum poteſtas creſcit ſucceſſu locorum ratione trigecupla. Quare, character in loco ſecundo trigeſies tantundem valet quantum primo. In tertio loco tricies quantum ſecundo & nongenties quantum primo & ita porro, quod pluribus videri poteſt ex ſequenti tabula, qua, ſimiliter etiam loci primi valorem breuitatis cauſa prætermittimus, qui etiam ex §pho 87 & 84. ſatis cognoſci poteſt. Eſt igitur:

20 — 30

Digitized by Google

ao	= 30	aα =	54
aa	= 31	aβ =	55
ab	= 32	aγ =	56
ac	= 33	aδ =	57
ad	= 34	aε =	58
ae	= 35	aζ =	59
af	= 36	bo =	60
ag	= 37	b =	61
ah	= 38	bb =	62
ai	= 39	bc =	63
ak	= 40	bd =	64
al	= 41	be =	65
am	= 42	bf =	66
an	= 43	co =	90
ap	= 44	do =	120
aq	= 45	eo =	150
ar	= 46	aoo=	900
as	= 47	boo=	1800
at	= 48	coo=	2700
av	= 49	aooc=	27000
aw	= 50	booo=	54000
ax	= 51	aoooo=	810000 & ita porro.
ay	= 52		
az	= 53		

Theorema.

94. Litteræ δεβn ═ numero 754963.

Demonſtratio.

Littera n, in loco primo ═ 13

Character in loco ſecundo toties indicat triginta quot continet vnitates. $\beta = 25$. Si igitur β ſeu 25.30. factum quod ex iis oritur = 750 ergo β ═ 750

Sic Character in loco tertio toties indicat nongenta, quot continet vnitates, littera ε = 28. ſi multiplicantur per 900 factum eſt ═ 25200

H Pari-

Digitized by Google

Pariter etiam character in loco quarto toties indicat viginti ſeptem millia, quot continet vnitates, littera $\delta = 28$, qui numerus ſi multiplicatur per 27000 factum eſt $=$ 729000

Quoniam vero $13 + 750 + 25200 + 729000 = 754963$ etiam, numerorum litteræ δ. β n $=$ 754963

Corollarium.

95. Ex omnibus allatis exemplis variorum numerationis generum ſatis apparet: Numerationem decadicam non eſſe tam ſummæ neceſſitatis, vt ipſa penitus carere & ſine illa numerare non valeamus.

Scholion.

96. Hæc numeratio decadica nobis abſolute neceſſaria videtur, quia a prima ætate eidem adſueuerimus. Quicquid enim a majoribus noſtris nobis traditum eſt, nos etiam a teneris vnguiculis addiſcimus, id vim naturæ temporum ſucceſſu obtinet. Cur vero omnes homines ad decem vsque numerare conſueuerint, & non ad alium quendam numerum ſe conuerterint vt duo, tria, quatuor, quinque, tum iterando vnum quinque, duo quinque &c. ſicut vndecim, duodecim: de eo quidem plurimæ in medium proferri ſolent cauſæ. Sed probabilior omnium hæc videtur: Homines naturali lege decem gaudent digitis, quibus tam diu in computandis numeris vti ſolent, donec ſatis hac in re verſati ſunt. Quod in primis exempla infantium ſatis docent, qui digitorum ope numeros componunt. Quibus ex cauſis etiam vel ſupra denominati characteres ſimplices *digitorum* nomine denotati ſunt a veteribus.

Corollarium.

97. Quo plures ſunt numerorum digiti eo pauciores etiam characteres ad numerum indicandum diſcribendumque ſunt neceſſarii, & exiguo ſpatio poſſunt intercludi. Quo vero paucioribus conſtat digitis numeratio, eo ſæpius etiam ſunt iterandi characteres, qua crebra characterum repetitione, multo amplius impletur ſpatium in deſcribendis numeris, quam ſi per

Digitized by Google

per genus quoddam numerationis, quod pluribus gaudet digitis, numerus exprimitur.

Scholion.

98. Hoc ſatis clare exempla ex vno alteroque numerationis genere deſumpta probant. Numerus enim viginti tria in arithmetica binaria per quinque ſigna nimirum 10111 in decadica vero per duo: 23 in hac vltima abſoluta per vnicum ſignum z exprimitur. Et quod in binaria numeratione per decem ſigna 1011100100 in decadica per tria 740 in hac noviſſime demonſtrata numeratione per duo ſigna 50 indicatur.

Corollarium.

99. Quo pauciores ſunt characteres in numeratione ſimplices eo facilior etiam inſtituenda numerorum multiplicatio eſt. Quo plures vero characteres ſimplic[illegible]meratio continet, eo difficilior etiam eſt multiplicatio[illegible]e inſtituenda. E.gr. in numeratione binaria numeri tant[illegible] *duo* multiplicantur; in denaria, multiplicatio vsque ad decem creſcit, & in numeratione viginti quatuor ſignis numerorum gaudente, cum totidem etiam numeris multiplicatio inſtituenda eſt. Quod ex ipſis numerationum tabulis videri poteſt.

Scholion.

100. Ex quibus omnibus manifeſte intelligi poteſt, quod: numeratio quæ cognitu difficilis, facilis ſcriptu, & quæ ſcriptu contra facilis, difficilis cognitu ſit. Quicquid igitur ab vna parte alicui emolumento eſt, ab altera parte in detrimentum convertitur. Et nulla res eſt tam completa & perfecta, quæ omnes habeat numeros & non certo quodam laboret vitio.

FINIS.

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

Digitized by Google

Corrigenda.

Pag. 9 lin. 18 lege *loco* p. 11. lin. 9 leg. *præc.* p. 12 §. 40 lin. 3. leg. *indicatur, ſine.* p. 15 lin. a fine 4 leg. *ſecundum.* p. 19 lin. 3 punctum, quod intra 4 & o reperitur, fini ſecundæ periodi nimirum charactери 3 annecti debet. p 17 & 18 hæc tabula ordine inuerſo, nimirum a dextr[illegible]m verſus vti characteres creſcunt legi debet; quæ vero ex[illegible]pothetæ retrogrado ordine typis exſcripta eſt. p. 22 li[illegible] *quarto.* p 23 & 24. hac in tabula nonnullæ lineæ partim omiſſæ partim non ſunt fractæ; quæ tamen quod earum relatio indicat frangi debuiſſent. Quod etiam characteres §pho 73 & ſequentibus, qui numeros 10, 11 & 12 exprimere debent, non ſatis accurate exſculpti ſint, hoc vel me non dicente qui libet ſatis cognoſcet. Quæ vero in ſubſequentibus occurrunt vitia, Ben. Lect. humanitati relinquo, ſiquidem ob meam abſentiam hæc omnia corrigere & emendare non potui.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

BIBLIOTECA